Annexe :
Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire, éléments de surface, élément de volume

Remarque : « élémentaire » en physique signifie « infiniment petit ».

1. Définitions préalables

1.1. Distinction entre « les composantes » et « les coordonnées » d'un vecteur

Les ***coordonnées*** d'un vecteur sont les trois nombres permettant de repérer la pointe du vecteur (point M sur les schémas ci-dessous) lorsque celui-ci est tracé à partir de l'origine O du repère :

- $M(x, y, z)$ en cartésien
- $M(r, \theta, z)$ en cylindrique
- $M(r, \theta, \varphi)$ en sphérique

Les ***composantes*** d'un vecteur sont les trois termes de la décomposition du vecteur dans la Base Orthogonale Normée Directe (BOND, my name is) :

- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$: le système cartésien est le seul pour lequel les projections des composantes (i.e. les coefficients devant les vecteurs unitaires) sont égales aux coordonnées
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$ en cylindrique : l'angle θ est « caché » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ en sphérique : les angles θ et φ sont « cachés » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$

1.2. Définition du déplacement élémentaire

Cette notion n'a d'intérêt que lorsque le vecteur repère une position M. Le vecteur $\overrightarrow{dOM}$ est défini comme étant le ***déplacement élémentaire*** du point M ***causé par les variations élémentaires de ses trois coordonnées***. L'expression des composantes de ce vecteur $\overrightarrow{dOM}$ en fonction des variations élémentaires des coordonnées (par exemple dx, dy, dz en cartésien) dépend du système de coordonnées (cf. exos ci-après).

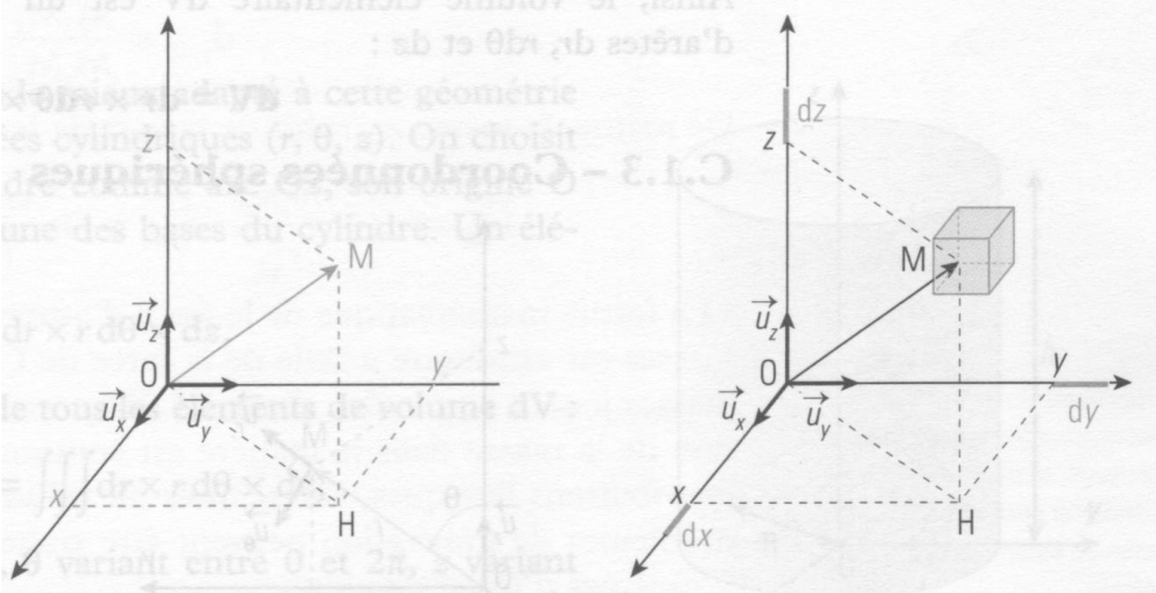
1.3. Surfaces élémentaires et volume élémentaire

Les *variations élémentaires des coordonnées* du point M ne définissent pas uniquement un déplacement élémentaire, mais aussi un volume élémentaire et six surfaces élémentaires.

On voit bien sur les schémas ci-dessous que les variations des coordonnées permettent de dessiner un cube associé : c'est ***le volume élémentaire***. Ce cube a 6 faces, qui sont les six ***surfaces élémentaires*** associées que l'on peut définir.

2. Expressions des quantités élémentaires dans les 3 systèmes de coordonnées

2.1. Coordonnées cartésiennes

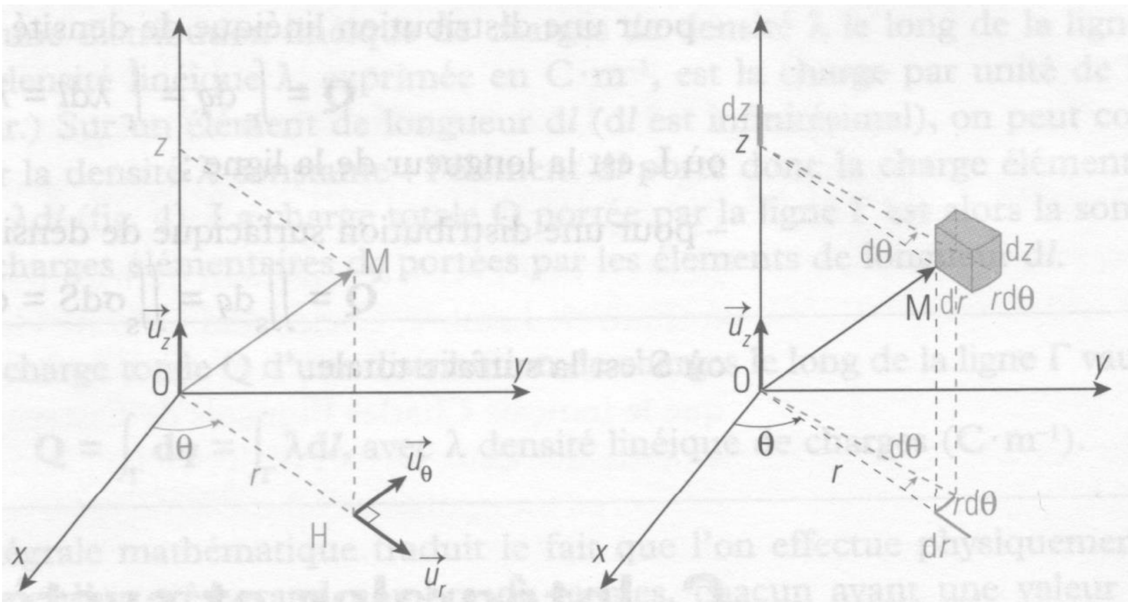


- En vous aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des composantes dx, dy, dz du déplacement élémentaire

2.2. Coordonnées cylindriques



Si les trois déplacements élémentaires avaient été assimilés localement à leur tangente (dessinés « au 1er ordre »), ils seraient rectilignes. En outre, la base étant orthogonale, les trois composantes du déplacement élémentaire seraient orthogonales entre elles. Le volume élémentaire engendré par les variations des coordonnées cylindrique serait alors un **CUBE**, et ses faces des **CARRES**.

Pour plus de clarté sur les dessins ci-dessus, la courbure des déplacements élémentaires a été représentée (dessin à l'ordre 2 au moins). Mathématiquement, on se limitera toujours à l'ordre le plus bas non nul : il faudra donc ici ***toujours s'imaginer un CUBE et des faces CARREES***.

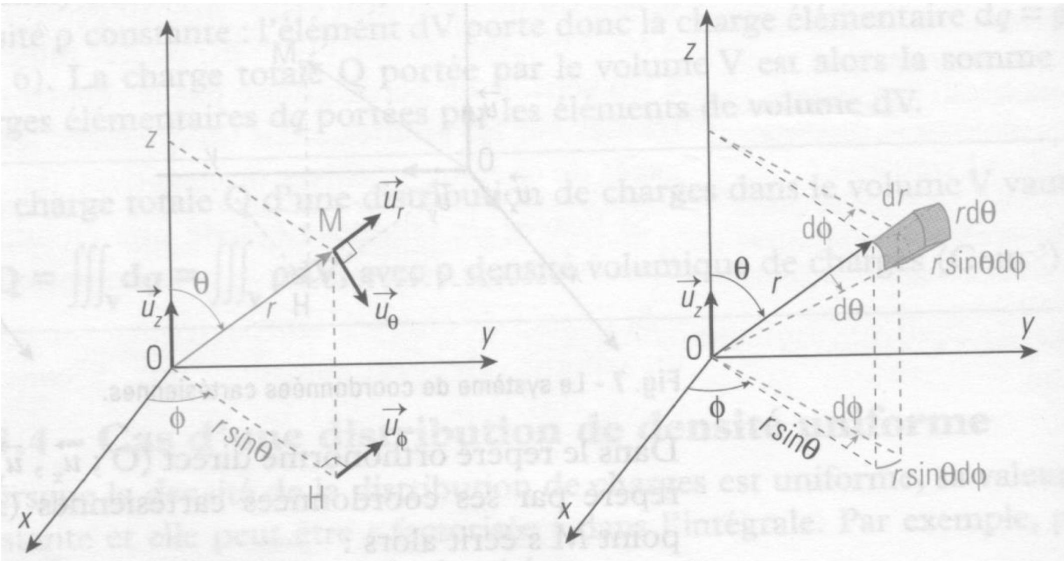
- En s'aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, dz$ du déplacement élémentaire

2.3. Coordonnées sphériques



- En vous aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + rsin(\theta)d\varphi\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, rsin(\theta)d\varphi$ du déplacement élémentaire