Résolution de Pb 1* : *Jet Lev

Un jetlev est un dispositif fixé au dos d'un pilote lui permettant de s'élever au-dessus d'un lac. Une poussée suffisante est permise grâce à l'expulsion d'eau à grande vitesse par deux tuyères orientées vers le bas et alimentées grâce à un tuyau flexible d'une dizaine de mètres de long. Afin de limiter le poids de l'engin, la pompe et le carburant sont disposés dans un bateau auxiliaire.

Quelle puissance la pompe doit-elle fournir pour maintenir le pilote à $5m$ au-dessus du niveau de l'eau ?

Exercice : Vase de Tantale, oscillateur de relaxation mécanique (extrait d'un vieux CCP)

Etude d'un exemple d'oscillateur mécanique, sans basculement de pièces mécaniques

On notera ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, et l'on prendra pour valeurs numériques : $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; g = 9,8 m.s^{-2}.

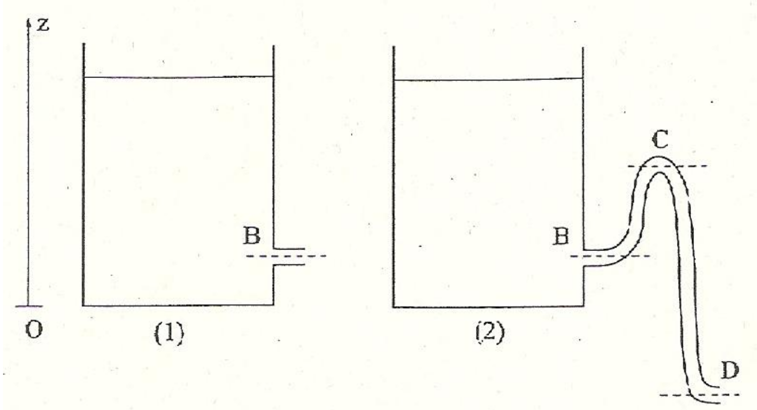

Figure I.1

I.1. Vidange d'un réservoir :

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S. Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (voir figure I.1 à gauche).

Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h et percé d'un orifice situé au niveau du point B à hauteur z_B. Cet orifice possède une section droite σ.

On nomme D_s le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir et l'extrémité de l'orifice sont en contact avec l'air, à la pression atmosphérique $P_0 = 1$ bar.

Tous les écoulements considérés sont assimilés à des écoulements non visqueux, homogènes, incompressibles et laminaires.

I.1.1. On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur h(t) de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement.

Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement.

Quelle relation peut-on écrire entre la vitesse de la surface libre v_A, la vitesse v_B en B, et les sections σ et S ? Justifier.

I.1.2. Enoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de l'une de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses, et pour des sections droites S et σ quelconques, la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B. Que vaut alors le débit D_S ?

I.1.3. Que vaut la vitesse v_B dans la limite où $\sigma << S$?

On conservera l'hypothèse $\sigma << S$ pour toute la suite du problème

En déduire la valeur algébrique de $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$.

I.1.4. Calculer la valeur numérique du débit D_s lorsque h = 2 m, z_B = 0,1 m et σ = 2 cm². Exprimer le résultat dans les unités du système international, puis en litre par seconde.

I.2. Influence du siphon :

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante σ, dont la hauteur maximale, représentée par le point C de la figure I.1 à droite, se trouve à une hauteur z_C supérieure à la hauteur z_B de l'orifice d'entrée de la conduite. Un siphon peut se trouver dans deux états. Dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'un bout à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se trouve alors en contact avec l'air à pression atmosphérique P_0. Dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau de l'eau excède z_C.

1.2.1. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit constant D_s, que l'on exprimera en fonction de h, g, σ et de la hauteur d'eau d'un des trois points B, C ou D.

1.2.2. Former une équation différentielle du premier ordre pour l'évolution temporelle de la hauteur h(t) de la surface libre, dans le régime ou le siphon est amorcé.

1.2.3. Trouver la solution de cette équation différentielle en partant d'une condition initiale $h(0) = h_0 > z_C$. En déduire la durée nécessaire t_1 pour que le siphon se désamorce.

I.3. Réservoir alimenté :

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i, arrivant par l'orifice A, et qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (figure I.2.).

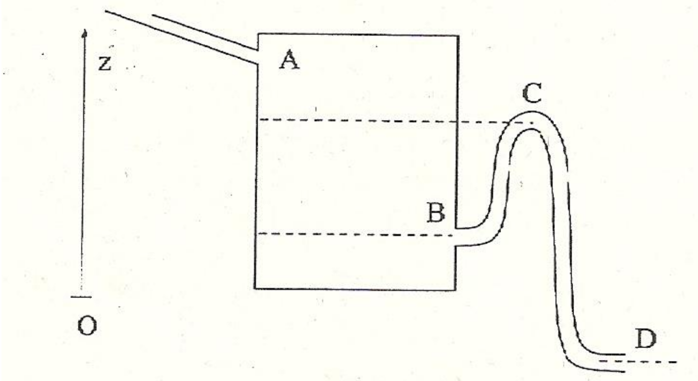

Figure I.2

I.3.1. Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur h(t) en présence du débit D_i, le siphon étant amorcé ?

I.3.2. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire de hauteur h_s constante, que l'on exprimera en fonction de z_D, D_i, σ et g.
Cette solution est-elle acceptable si la valeur de h_S associée à un débit D_i est telle que $h_S < z_B$? Justifier.

I.3.3. Décrire l'évolution de la hauteur h(t) lorsque le siphon est désamorcé.

I.3.4. Montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_c, le système représenté sur la figure I.2. se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps.
Déterminer la valeur de D_c.

I.3.5. On suppose $D_i < D_c$. Représenter schématiquement l'allure temporelle da la hauteur h(t) en fonction du temps t.