Electromagnétisme Chap.1 – Les équations de Maxwell

Intro : Les champs électrique et magnétique ont été introduits en PCSI à partir de la force de Lorentz, i.e. par l'effet de ces champs sur les particules chargées. ***L'électromagnétisme*** est une importante partie de la physique dont l'objectif est de ***déterminer l'évolution spatiale et temporelle des champs*** $\vec{E}$ ***et*** $\vec{B}$ en fonction des contraintes imposées par l'expérimentateur.
Ils 'sont créés par / ils interagissent avec' les milieux matériels, mais contrairement aux autres champs que vous connaissez, $\vec{E}$ ***et*** $\vec{B}$ ***existent aussi dans le vide***. On notera que la notion de champ en électromagnétisme a été conçue mathématiquement par analogie avec la notion de champ introduite en mécanique des fluides.
Les évolutions de ces champs sont régies par les ***équations de Maxwell***, qui sont à l'électromagnétisme ce que la RFD est à la mécanique newtonienne. Elles sont les fondements de la théorie. Avec la thermodynamique et la mécanique de Newton, c'est le 3^{e} immense succès de la physique classique.

Les applications de l'électromagnétisme ? Tout ce qui n'est pas gravitationnel ou nucléaire… elle permet d'expliquer presque tous les phénomènes observables :

- la force entre électrons et protons des atomes
- liaisons entre atomes pour constituer les molécules
- toutes les propriétés chimiques sont de nature électromagnétique
- ondes électromagnétiques : radio, portables, lumière (visible, IR, rayons X, etc.)
- lois de l'optique : diffusion, absorption, lois de Descartes
- étude des circuits électriques : permet de démontrer les lois de Kirchhoff
- comportement d'un condensateur ou d'une bobine en électronique
- machines électriques de puissance : moteurs, hacheur, onduleur, transformateur
- aimant permanents, etc.

Bref, c'est un gros morceau. Pour ce qui concerne la physique microscopique, il est clair que l'électromagnétisme de Maxwell n'est plus valide à trop petite échelle, c'est alors la théorie quantique des phénomènes électromagnétiques qu'il faut invoquer (Quantum Electro-Dynamics, QED). Mais même à cette échelle, des modèles classique fondés sur les équations de Maxwell permettent de décrire plutôt bien (mais approximativement) certains phénomènes microscopiques.

1. Révisions de PCSI

1.1. Force de Lorentz

Le champ électromagnétique a été introduit en PCSI à partir de son effet sur les particules chargées. C'est pertinent, car l'influence de ce champ sur la matière est la seule façon dont il se manifeste à nos sens. C'est la seule façon que l'on a de le détecter.

- ❖ Rappeler l'expression de la force de Lorentz, force qui s'applique sur toute particule chargée en présence d'un champ électromagnétique

Remarque : Les phénomènes d'absorption et d'émission de photons vus en chimie, et lors de la présentation du fonctionnement d'un LASER, ne sont pas du ressort de l'électromagnétisme de Maxwell, car ce sont des phénomènes quantiques. Il existe des descriptions classiques de ces phénomènes, fondées sur la mécanique de Newton et les équations de Maxwell. Mais ces descriptions sont approximatives et incomplètes (elles ne peuvent pas expliquer tout ce que l'on observe).

1.2. Sources du champ électromagnétique – Description de la matière

- ❖ Quelle grandeur physique est source du champ électrique ? Laquelle est source du champ magnétique ?

Avec les équations de Maxwell, on verra que $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est une autre source de $\vec{B}$, et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est une autre source de $\vec{E}$.

On notera que dans les équations de Maxwell, la matière – donc la répartition spatiale des charges libres et des courants libres – est décrite comme étant répartie continûment dans l'espace 3D (description « *volumique* »). C'est la description mésoscopique la plus générale, car nous vivons effectivement dans un espace tridimensionnel. C'est celle que nous avons présenté dans le chapitre « Transport de charge ».

Il existe d'autres façons de décrire une répartition continue de la matière : la description « *surfacique* » et la description « *linéique* », qui facilitent les calculs dans certains situations. Nous les verrons en temps voulu. On peut déjà noter que l'étude des circuits électriques a été faite dans la description linéique.

La description la plus fondamentale de la répartition de la matière est la description « *corpusculaire* » : la charge électrique est portée par des particules élémentaires, dont certaines sont constitutives des atomes. Nous ne l'utiliserons que très rarement.

1.3. Puissance de la force de Lorentz

- ❖ Quel champ permet d'augmenter la norme de la vitesse d'une particule chargée ?
- ❖ Quel est alors l'effet de l'autre champ ?

1.4. Deux exemples simples de mouvements

On considère le champ électrique créé par deux plaques planes en regard l'une de l'autre. C'est un condensateur plan. On suppose que le champ créé par les plaques chargées est uniforme. On rappelle que la norme du champ est reliée à la tension aux bornes du condensateur par l'expression $E = U/d$, où d est la distance entre les deux plaques. On rappelle aussi l'expression de l'énergie potentielle électrique $E_{pot} = qV$ d'une particule de charge q, placée en un point de potentiel électrique V.

- ❖ Un proton est placé à proximité de la plaque chargée positivement. En utilisant la méthode la plus appropriée… établir l'expression de la vitesse de la particule chargée lorsque celle-ci atteint l'autre plaque.

Remarque : les suppositions faites ci-dessus seront démontrées dans les chapitres ultérieurs.

On considère à présent un champ magnétique uniforme créé par un dispositif extérieur. Il n'y a plus de champ électrique. On étudie le mouvement d'un proton dans ce champ magnétique. On suppose que le mouvement est plan et circulaire. La vitesse initiale de la particule est prise dans le plan perpendiculaire au champ.

- Déterminer le rayon de la trajectoire en fonction de la norme de la vitesse initiale, de l'intensité du champ magnétique et de la valeur de la charge

2. <u>Equations de Maxwell</u>

Ces équations sont postulées, et constituent les principes qui fondent la théorie de l'électromagnétisme (équivalents des principes de Newton pour la mécanique de Newton). Les champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ et les répartitions de charge et de courant électriques $\rho(\vec{r},t)$ et $\vec{j}(\vec{r},t)$ dépendent de la position et du temps. Tant que la mécanique classique est applicable (relativité d'Einstein incluse), les équations de Maxwell sont vérifiées.

Elles ne sont plus valables en physique quantique. Pourtant de nombreuses situations microscopiques peuvent être abordées (et l'ont été historiquement) avec les équations de Maxwell. Les résultats théoriques établis ne sont alors qu'approximativement valables.

2.1. <u>Préliminaire mathématique : rotationnel d'un champ vectoriel</u>

- Rappeler définition de l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes
- Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire
- Rappeler le lien entre la différentielle d'un champ scalaire et son gradient
- Rappeler la définition de la divergence d'un champ vectoriel
- Enoncer (schéma à l'appui) le Théorème de « Flux – Divergence » ou Théorème de Green-Ostrogradski
- Rappeler la définition du laplacien d'un champ scalaire

Il nous reste un dernier opérateur d'analyse vectoriel à découvrir : *le rotationnel d'un champ vectoriel*.

<u>Définition du rotationnel d'un champ vectoriel</u>

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

2.2. <u>Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée</u>

<u>Courbe orientée</u>

Soit une courbe Γ de l'espace 3D. C'est une figure géométrique unidimensionnelle, une « ligne » pas nécessairement rectiligne. Pour orienter cette courbe, et définir ainsi une *courbe orientée*, il faut se donner un *sens de parcours* le long de cette courbe.

Localement, en un point *M* sur cette courbe, le sens de parcours est donné par le vecteur *déplacement élémentaire* $\overrightarrow{d\ell}$: c'est un vecteur unitaire, localement tangent à la courbe au point *M*. Si l'on se donne un point *O* quelconque dans l'espace pour repérer la position du point *M* : $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{dOM}$. Ce vecteur représente le déplacement élémentaire du point *M* le long de cette courbe :

- sa direction est celle de la tangente à la courbe en *M*
- son sens défini le sens de parcours le long de la courbe

On choisit bien-sûr un sens de parcours identique tout le long de la courbe Γ.

Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée
Soit une courbe orientée Γ. Soit un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini en tout point de cette courbe.

Définition de la circulation élémentaire d'un champ vectoriel $\vec{a}$ en un point M d'une courbe orientée
$\delta C \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$

La circulation élémentaire du champ vectoriel au point *M* est un scalaire algébrique :

- si la composante du champ le long de la courbe est orientée dans le même sens que la courbe, la circulation élémentaire est positive ;
- sinon la circulation élémentaire est négative ;
- si le champ est localement orthogonal à la courbe, la circulation élémentaire est nulle.

Définition de la circulation C du champ $\vec{a}$ le long de la courbe orientée Γ,
C'est la somme des circulations élémentaires le long de le courbe, *selon son sens d'orientation* :
$\boldsymbol{C} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{V}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}}$

Si la courbe orientée est une *courbe fermée*, on note la circulation du champ :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

2.3. Préliminaire mathématique : Théorème de circulation-rotationnel (Stokes)

Soit un ***contour fermé orienté*** (**Γ**). Soit $\boldsymbol{S}$ une surface quelconque ***s'appuyant sur ce contour***. La circulation d'un champ vectoriel sur le contour est directement reliée au flux du rotationnel de ce champ à travers la surface $\boldsymbol{S}$.

Théorème de Stokes
$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{V}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \iint_{S} \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\mathbf{V}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}}$

Ce théorème nous permettra d'interpréter physiquement les équations locales impliquant le rotationnel d'un champ vectoriel. Il est indispensable de s'appuyer sur un schéma pour comprendre cette formule.

2.4. Les équations de Maxwell

Ce sont des équations locales, dont nous verrons les équivalents intégrales dans les chapitres suivants.

$\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$	$\boldsymbol{Maxwell - Gauss}$
$\boldsymbol{div(\vec{B}) = 0}$	$\boldsymbol{Maxwell - Thomson}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$	$\boldsymbol{Maxwell - Faraday}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$	$\boldsymbol{Maxwell - Ampère}$

Les constantes ε_0 et μ_0 sont liées au système d'unités ; dans le système MKSA :

ε_0 est la ***permittivité*** du vide ; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} ;

μ_0 est ***perméabilité*** magnétique du vide ; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} H.m^{-1}$

Remarque : Les champs $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ vérifient des ***équations différentielles couplées***. Ils ne peuvent pas être étudiés indépendamment l'un de l'autre. C'est pourquoi l'on parle de ***champ électromagnétique*** $(\vec{E},\vec{B})$, les champs électrique et magnétique étant simplement deux facettes de cette entité. En physique moderne, on décrit même ce champ par une seule entité : le tenseur électromagnétique.

Remarque : Ces équations sont linéaires, on peut donc appliquer ***le principe de superposition*** aux champs électrique et magnétique.

Remarque : Une propriété générale d'analyse vectorielle nous dit que lorsque le rotationnel et la divergence d'un champ sont connus, alors le champ peut être déterminé complètement si l'on se donne des conditions initiales et des conditions aux limites.

Remarque : Comme toutes les équations différentielles, les équations de Maxwell donnent ***l'évolution*** des champs dans l'espace et dans le temps. Si initialement il n'y a pas de champ, alors les termes $\boldsymbol{\rho}(\vec{r},t)$ et $\vec{j}(\vec{r},t)$ apparaissent bien comme les ***sources du champ électromagnétique***. Si un champ préexistant rencontre des charges et des courants, il est alors simplement modifié, pas véritablement « créé » (exemple : diffusion de la lumière par les molécules de l'air, une partie de l'onde électromagnétique incidente « rebondit » sur les molécules d'air).

2.5. Compatibilité avec la loi de conservation de la charge

- ❖ A partir de l'équation de Maxwell-Ampère et du formulaire d'analyse vectoriel, montrer que la conservation de la charge peut être déduite des équations de Maxwell

3. Relations de passage du champ EMic à la traversée d'une surface

On considère une surface chargée et parcourue par un courant. Cette modélisation *surfacique* de la répartition spatiale de matière (donc des charges et des courants) peut s'avérer intéressante. Nous l'utiliserons notamment lors de l'étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal (modèle métal parfait).

3.1. Distribution surfacique de charge

- ❖ Rappeler la définition de la charge volumique
- ❖ Rappeler la relation entre la charge totale d'un volume de l'espace et la masse volumique

A l'échelle macroscopique, la distribution volumique est la description la plus précise de la répartition de charge dans l'espace. Lorsqu'un corps électrisé possède une dimension très petite devant les autres (feuille de papier par exemple), on peut décrire la répartition de la charge par une *distribution surfacique*. Dans l'exemple de la feuille de papier, *cela revient à négliger l'épaisseur de la feuille* devant sa longueur et sa largeur.

On définit une ***densité surfacique de charge*** $\boldsymbol{\sigma}$ à l'échelle mésoscopique, fonction des coordonnées d'espace, qui donne la quantité élémentaire de charge dQ située sur *la surface élémentaire* dS :

$$dQ \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}\, dS$$

La fonction $\boldsymbol{\sigma}(\vec{r})$ représente la *distribution surfacique de charge*.

La charge totale située sur une surface S est la somme des quantités élémentaires de charge :

$$\boldsymbol{Q} = \iint_S \boldsymbol{\sigma\, dS}$$

3.2. *(Complément)* Distribution surfacique de courant

Si la zone de l'espace où circule le courant possède une dimension très petite devant les deux autres, on peut considérer que le courant circule sur une surface : on parle de *distribution surfacique de courant*.

Dans cette modélisation, l'intensité est alors un débit de charge *à travers une ligne*. En tout point de cette ligne, on note $\vec{n}$ le vecteur normal à la portion élémentaire de cette ligne, et la relation entre l'intensité élémentaire et le « vecteur densité surfacique de courant » $\overrightarrow{J_S}$ s'écrit :

$$dI = (\overrightarrow{J_S} \cdot \vec{n})d\ell$$

où $d\ell$ représente la longueur élémentaire de ligne considérée. La densité surfacique de courant est en $A.m^{-1}$.

En intégrant tout le long de la ligne de longueur L, on exprime l'intensité traversant cette ligne en fonction du vecteur densité surfacique de courant :

$$I = \int_L (\overrightarrow{J_S} \cdot \vec{n})d\ell$$

3.3. Discontinuité du champ électromagnétique à la traversée d'une surface

Lorsque la modélisation surfacique est choisie en une zone de l'espace, ***les équations de Maxwell doivent être remplacées*** au niveau de cette surface ***par les relations de passage***. Ces relations se démontrent à partir des équations de Maxwell en faisant tendre un volume vers une surface (on fait tendre l'épaisseur du volume vers zéro). On les admettra dans ce cours.

Les limites du champ $\vec{E}$ avant et après la surface ne sont pas égales : ***le champ électrique est discontinu à la traversée d'une surface chargée.***

Les limites du champ $\vec{B}$ avant et après la surface ne sont pas égales : ***le champ magnétique est discontinu à la traversée d'une nappe de courant surfacique.***

$$\boldsymbol{\vec{E}(x = O^+) - \vec{E}(x = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{u_x}}$$
$$\boldsymbol{\vec{B}(x = O^+) - \vec{B}(x = 0^-) = \mu_0 \overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{u_x}}$$

La composante ***tangentielle de $\vec{E}$*** *est toujours une* ***fonction continue de la position.***
La composante ***normale de $\vec{B}$*** *est toujours une* ***fonction continue de la position.***

4. Energie électromagnétique : une nouvelle forme d'énergie

4.1. Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide

A partir des équations de Maxwell, on peut établir l'équation suivante (admis).

Dans le vide :

$$\boldsymbol{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) = 0}$$

- $\boldsymbol{u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$ est l'énergie par unité de volume ***stockée par le champ électromagnétique*** (Jm^{-3})
- $\boldsymbol{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$ est le vecteur de Poynting, c'est un vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique (Wm^{-2}). Il représente le débit surfacique d'énergie (***la puissance surfacique***) transportée par l'onde électromagnétique à travers une surface

❖ Donner l'expression reliant le vecteur de Poynting à la puissance transportée par l'onde à travers une surface

4.2. Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique en présence de charges libres

Dans un milieu conducteur, i.e. ***en présence de porteurs de charge*** :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la puissance volumique reçue par les porteurs de charge (Wm^{-3}), et fournie par le champ électromagnétique. Si les porteurs « frottent » sur un milieu support (réseau de cations d'un fil de cuivre par exemple), alors c'est aussi la ***puissance volumique dissipée par effet Joule.***

Cette équation locale de conservation de l'énergie en présence d'un champ électromagnétique s'appelle aussi « équation locale de Poynting ». Avec des mots, elle signifie que toute l'énergie perdue par le champ présent dans un volume a été :

- soit transférée aux porteurs de charge présents dans ce volume,
- soit est sortie par les surfaces délimitant ce volume

C'est un nouvel exemple d'équation locale de conservation, associée à un transport d'énergie par rayonnement électromagnétique.

Révisions de PCSI

Le **bloc 3,** centré sur l'étude des mouvements de particules chargées, se prête à une ouverture vers la dynamique relativiste, qui ne doit en aucun cas être prétexte à des débordements, en particulier sous forme de dérives calculatoires ; la seule compétence attendue est l'exploitation des expressions fournies de l'énergie et de la quantité de mouvement d'une particule relativiste pour analyser des documents scientifiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur-accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel. Citer une application
Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique.	Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire. **Approche documentaire** : analyser des documents scientifiques montrant les limites relativistes en s'appuyant sur les expressions fournies $E_c = (\gamma\text{-}1)mc^2$ et $p = \gamma mv$. Citer une application

ÉLECTROMAGNETISME

Présentation

En première année, les champs électrique et magnétique ont été présentés *via* les effets de la force de Lorentz et une étude descriptive du champ magnétique a été effectuée pour introduire les phénomènes d'induction. Le cours de deuxième année aborde les équations locales. Les équations de Maxwell sont présentées comme des postulats de l'électromagnétisme, le but étant de rendre les étudiants rapidement opérationnels dans leur utilisation. L'étude de la conversion de puissance et celle des ondes électromagnétiques seront une exploitation.

Le programme est découpé en plusieurs rubriques indépendantes dont l'ordre de présentation relève de la liberté pédagogique du professeur. En particulier, les équations de Maxwell peuvent être formulées dès le début sous leur forme la plus générale, ou bien elles peuvent être introduites de manière progressive en commençant par une forme simplifiée en régime stationnaire.

Objectifs de formation

- Manipuler des champs scalaires et vectoriels.
- Conduire des analyses de symétrie et d'invariance.
- Calculer des champs à l'aide de propriétés de flux ou de circulation.
- Établir le lien entre des lois locales et des propriétés intégrales.
- Décrire quelques comportements phénoménologiques de la matière dans un champ électrique ou magnétique.

Courants de déplacement.	Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.

Dans la partie ondes électromagnétiques du programme de PSI

1.3. Bilan de Poynting de l'énergie électromagnétique dans un milieu quelconque	
Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting. Équation locale de Poynting.	Identifier les différents termes de l'équation locale de Poynting. Interpréter le vecteur de Poynting comme le vecteur densité de flux de puissance électromagnétique.

Dans la partie Compétences mathématiques, section Analyse vectorielle

c) rotationnel	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.