Electromagnétisme Chap.5 –
Analogies entre champ électrique et champ gravitationnel

Intro : L'expression de la force fondamentale s'exerçant entre deux particules chargées est analogue à celle s'exerçant entre deux particules massives. Cette similarité formelle est à l'origine des analogies entre électrostatique et gravitation.

1. Analogies entre champ électrique et champ gravitationnel

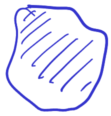
1.1. Définition du champ gravitationnel

La définition est similaire à celle du champ électrique : le champ gravitationnel est défini à partir de la force gravitationnelle exercée sur une masse qui se trouve dans le champ.

Définition du champ gravitationnel

Une distribution de masse crée un champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(\boldsymbol{M})$ tel qu'une masse $\boldsymbol{m}$ placée en M subit la force :

$$\vec{F} \overset{\text{def}}{=} m\vec{\mathcal{G}}(\boldsymbol{M})$$



M ·m

$\vec{F} = q\vec{E}$

1.2. Champ créé par une masse ponctuelle

❖ Etablir l'expression du champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle

Ce calcul est aussi possible pour le champ électrique, bien que nous ayons établi ce résultat à partir du Théorème de Gauss.

1.3. Analogies et différence

Toutes les définitions et propriétés d'invariance et de symétrie vues dans le cas du champ électrique se généralisent au cas du champ gravitationnel, *sauf les plans d'antisymétrie* qui n'existent pas dans le cas gravitationnel (pas de masse négative).

Toutes les expressions mathématiques vues pour le champ électrostatique sont transposables au cas gravitationnel en effectuant les substitutions suivantes :

Analogies entre électrostatique et gravitation

$$\boldsymbol{q} \leftrightarrow \boldsymbol{m}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon_0}} \leftrightarrow -\boldsymbol{G}$$

$\vec{F}_g = -G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u_r}$

$\vec{F}_e = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}$

1.4. Théorème de Gauss gravitationnel

❖ Enoncer le Théorème de Gauss gravitationnel

1.5. Champ gravitationnel créé par un astre à symétrie sphérique

Dans le cours de mécanique de PCSI traitant des Champs de Forces Centrales Conservatives (mouvement planètes et satellites), vous avez admis que le champ gravitationnel créé par un astre *à symétrie sphérique* pouvait être assimilé au champ créé par un point matériel de même masse, situé au centre de l'astre.

❖ Démontrer cet énoncé à l'aide du théorème de Gauss. Pour aller plus vite, on rappelle que :
  - les invariances et plans de symétrie de la distribution de masse impliquent : $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(\mathrm{r})\overrightarrow{u_r}$
  - la surface de Gauss est une sphère centrée sur l'origine, de rayon r, et $\oiint_{S_{gauss}} \vec{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{dS} = \mathcal{G}(\mathrm{r})4\pi r^2$

2. *(Compl. hors programme)* Expressions intégrales du champ électrostatique

Il est intéressant de mentionner que la force électrique fondamentale – appelée force de Coulomb – peut être utilisée comme fondement de l'électrostatique. On peut alors en déduire le Théorème de Gauss (dans le cours, nous avons emprunté le chemin inverse).

C'est la raison pour laquelle la ressemblance *formelle* (i.e. similarité des *formules* mathématiques) entre la force de Coulomb et la force gravitationnelle est une base solide pour fonder l'analogie entre les deux classes de phénomènes dont on a parlé précédemment.

A partir de la force de Coulomb, et par superposition, il est possible d'établir des expressions intégrales du champ électrique en fonction de la distribution de charge. Par intérêt culturel, on donne ci-dessous ces expressions intégrales. Elles sont généralement peu utiles pour les calculs analytiques, car les calculs « à la main » sont trop difficiles, voire impossibles à effectuer. Par contre, ces expressions sont très utiles pour déterminer le champ électrique par résolution numérique (par ordinateur).

Toutes ces formules se démontrent à partir de la force de Coulomb et en invoquant le théorème de superposition.

Distribution discrète : Si la matière chargée est modélisée par des corpuscules q_i placés aux positions P_i

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 \, P_iM^2} \vec{u}_{P_iM}$$

Distribution volumique : Si la matière chargée est modélisée par une fonction continue 3D $\rho(P)$

$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in V} \frac{\rho(P)\, d\tau}{4\pi\varepsilon_0 \, PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Distribution surfacique : Si la matière chargée est modélisée par une fonction continue 2D $\sigma(P)$

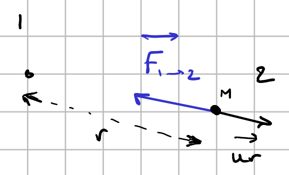
$$\vec{E}(M) = \iint_{P\in S} \frac{\sigma(P)\, dS}{4\pi\varepsilon_0 \, PM^2} \vec{u}_{PM}$$

Distribution linéique : Si la matière chargée est modélisée par une fonction continue 1D $\lambda(\mathrm{P})$

$$\vec{E}(M) = \int_{P\in\Gamma} \frac{\lambda(P) d\ell}{4\pi\varepsilon_0 \, PM^2} \vec{u}_{PM}$$

5.2.3. Analogies avec le champ gravitationnel	
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.

1.2. $\vec{F}_{1\to 2} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r} = m_2\,\vec{\mathcal{G}}(M)$ où M : posit° de la masse m_2



avec $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -G\dfrac{m_1}{r^2}\vec{u_r}}$

le champ gravitationnel créé par la masse m_1 (au niveau du pt M)

1.4. th. Gauss Estati° : $\oint\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

d'où le th. Gauss gravitationnel : $\boxed{\oint\!\!\oint_S \vec{\mathcal{G}}.\vec{dS} = -4\pi G \times M_{int}}$

1.5.

Invar. + sym.ie + spl. Gauss :
$\oint\!\!\oint_{S_{gauss}} \vec{\mathcal{G}}.\vec{dS} = \mathcal{G}(r).\,4\pi r^2$

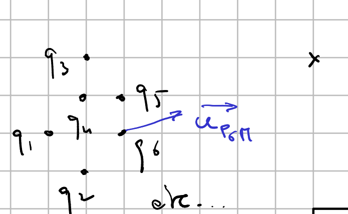
En pt M ext. à astre sph.ique, $M_{int} = M_{astre}$. D'où :

$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -G\dfrac{M_{astre}}{r^2}\vec{u_r}}$

m̂ chp qu'un astre ponctuel placé en O, concentrant toute la masse M_{astre}.

justifie l'hyp. du cours de PCSI mvt planètes autour Soleil : " Soleil assimilable à un pt "

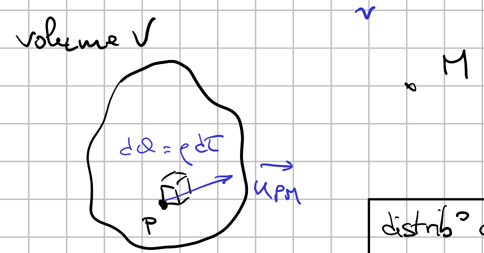
2. (HPgm) Exp° intégrales du chp (via superposit°)



$\vec{E}(M) = \sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_iM^2}\vec{u_{P_iM}}$

distrib° discrète

$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in \text{volume } V} \dfrac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u_{PM}}$



distrib° continue 3D