

1. Condensateur plan

- 1.1. Modélisation du condensateur plan
- 1.2. Champ et potentiel électrostatique créés par le condensateur
- 1.3. Capacité du condensateur
- 1.4. Influence du milieu isolant séparant les deux armatures
- 1.5. Origine physique de l'énergie stockée par le condensateur
- 1.6. Résolution de pb : capacité d'un condensateur cylindrique

2. Dipôle électrostatique

- 2.1. Moment dipolaire d'une distribution de charge globalement neutre
- 2.2. Approximation dipolaire
- 2.3. Potentiel et champ électrostatique créés par un dipôle
- 2.4. Topographie du champ et du potentiel créés
- 2.5. Action d'un champ extérieur *uniforme* sur un dipôle
- 2.6. Action d'un champ extérieur *non uniforme* sur un dipôle

3. Application du dipôle : interactions ion-molécule et molécule-molécule

- 3.1. Moments dipolaires dans la matière
- 3.2. Interaction ion-molécule : solvation
- 3.3. Interaction molécule – molécule : Van der Waals
- 3.4. Dipôle induit : polarisabilité dans le modèle de Thomson

4. Energie électrostatique de constitution d'un noyau atomique

- 4.1. Première approche : analyse dimensionnelle
- 4.2. Calcul par adjonction progressive de charges

Intro : On étudie différentes situations impliquant un champ électrostatique. Dans le cas du **condensateur plan**, il s'agit d'établir la relation entre la charge des armatures d'un condensateur plan et la tension à ses bornes, établissant ainsi l'expression de sa capacité en fonction de sa forme et de la nature du milieu se situant entre les deux armatures. On étudie ensuite un doublet de charges opposées, modèle canonique du **dipôle électrostatique**, utile notamment pour comprendre les interactions entre molécules. On détermine en dernier lieu l'énergie de répulsion électrostatique au sein d'un **noyau atomique**, qui fournit alors une valeur minimale de l'énergie d'attraction nucléaire forte nécessaire à la cohésion du noyau.

1. Condensateur plan

1.1. Modélisation du condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plaques conductrices planes disposées parallèlement l'une à l'autre, et écartées d'une distance e . Sous l'effet d'un dispositif extérieur (un circuit muni d'un GBF par exemple), ces deux plaques conductrices se chargent : l'une est chargée positivement ($Q > 0$), l'autre négativement ($-Q < 0$). On étudie ce dispositif en statique : le condensateur est alimenté par une tension continue U et l'on considère le condensateur une fois complètement chargé. Pour les calculs qui vont suivre, on assimilera les armatures à deux plans infinis uniformément chargés en surface (σ_0). Pour revenir au dispositif réel (armatures d'extension finie), on prendra $\sigma_0 = \frac{Q}{S}$. On assimile l'air au vide.

1.2. Champ et potentiel électrostatique créés par le condensateur

- ❖ Grâce au Théorème de superposition, déterminer le champ électrique en tout point de l'espace
- ❖ Tracer l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.
- ❖ Exprimer la différence de potentiel entre les armatures en fonction du champ régnant à l'intérieur du condensateur. Pour cela, deux méthodes équivalentes :
 - par la relation locale, on calcul le potentiel en tout point (déjà fait), puis la ddp
 - on obtient la ddp directement par la relation intégrale entre potentiel et champ
- ❖ Au chapitre précédent, la carte de champ d'un condensateur de taille finie a été représentée. Expliquer en quoi cette carte corrobore le fait que le champ est presque nul à l'extérieur du condensateur.

1.3. Capacité du condensateur

- ❖ En déduire la relation entre la charge Q et la différence de potentiel aux bornes du condensateur.
- ❖ En déduire la capacité du condensateur en fonction de ses caractéristiques géométriques e et S , et des propriétés du milieu ϵ_0 situé entre les deux armatures.

1.4. Influence du milieu isolant séparant les deux armatures

Comme mentionné plus haut, les matériaux non-conducteurs peuvent réagir à la présence d'un champ extérieur en se polarisant. Ce phénomène participe à la valeur du champ électrique à l'intérieur du milieu isolant. Aussi la présence d'un milieu isolant entre les armatures d'un condensateur influe sur sa capacité.

On admettra que sous certaines hypothèses (milieu isotrope, linéaire et homogène), l'expression de la capacité établie en supposant que les armatures sont séparées par du vide reste valide en remplaçant la permittivité du vide ϵ_0 par la permittivité du milieu isolant ϵ .

Remarque : On définit la permittivité relative du milieu isolant par $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$. La permittivité relative de qq matériaux : eau 78 ; bois 2 ; plexiglas 3 ; verre 6 – 15 ; etc.

Remarque : Le champ électrique régnant dans le milieu isolant ne doit pas dépasser une valeur seuil, qualifiée de « champ disruptif », au-delà duquel l'isolant est ionisé et devient alors conducteur (apparition d'une étincelle dans l'air par exemple). Champ disruptif de l'air $\sim 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$

1.5. Origine physique de l'énergie stockée par le condensateur

- ❖ En électrocinétique, il a été démontré en PCSI l'expression de « l'énergie stockée par le condensateur ». En calculant l'énergie stockée par le champ électrique inter-armature, montrer que l'énergie « stockée par le condensateur » est en fait l'énergie stockée par le champ électrique.

1.6. Résolution de pb : capacité d'un condensateur cylindrique

Un condensateur cylindrique est constitué de deux armatures cylindriques, chacune de hauteur H , et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et telles que $R_2 - R_1 \ll R_1$. Déterminer la capacité de ce condensateur.

2. Dipôle électrostatique

Ce dispositif électrostatique va nous permettre de comprendre l'origine physique du **caractère dipolaire** de certains corps ; l'eau par exemple. On étudie dans un premier temps le champ et le potentiel créés par un dipôle. On s'intéresse ensuite aux actions d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle.

A travers ces deux études, on va montrer qu'un dipôle peut être entièrement caractérisé par son **moment dipolaire**.

2.1. Moment dipolaire d'une distribution de charge globalement neutre

Définition générale du moment dipolaire

On considère une distribution de charges positives et négatives, globalement neutre : la charge positive totale est opposée à la charge négative totale. Comme toujours en électrostatique, on considère que cette distribution est indépendante du temps (charges immobiles).

Ce type de distribution génère un champ et un potentiel électrostatique en tout point de l'espace, dont on va montrer qu'ils ne dépendent que d'une quantité appelée le **moment dipolaire** de la distribution. Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles q_i situées en des points P_i , on définit le moment dipolaire de la distribution par :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

où O est un point quelconque de l'espace. Cette définition ne dépend pas du point O dans le cas d'une distribution globalement neutre.

L'unité du moment dipolaire est le *C.m.* On l'exprime parfois en Debye, unité adaptée à l'échelle microscopique, $1D = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m.}$

Ordres de grandeur : H_2O : $p = 1,85 \text{ D}$; HNO_3 : $p = 2,17 \text{ D}$.

Modèle simple du doublet de charges

L'exemple le plus simple est celui d'un doublet de charge : une charge positive $q > 0$ située en un point P et une charge négative $-q < 0$ placée en N .

Pour un doublet, le *moment dipolaire* s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= q\overrightarrow{OP} + (-q)\overrightarrow{ON} \\ \vec{p} &= q\overrightarrow{NP}\end{aligned}$$

En électrostatique, ce doublet sera en général supposé *rigide* : la distance $d = NP$ reste constante.

Ce modèle simple du doublet est utile, car l'expression du moment dipolaire d'une distribution quelconque peut se ramener à celle d'un doublet, où N représente alors le barycentre des charges négatives, P celui des charges positives, et q représente la charge totale de la distribution de charges positives.

2.2. Approximation dipolaire

On va limiter toute notre étude aux cas où l'on pourra considérer le dipôle comme étant de « **petite dimension** ».

Etude 1 : Champ et potentiel créés par un dipôle (dipôle « actif »)

« Approximation dipolaire » signifie que l'on évalue le champ en des points M situés à des distances très grandes devant la dimension du dipôle : $\frac{r}{d} \gg 1$

Etude 2 : Action exercée par un champ extérieur sur un dipôle (dipôle « passif »)

« Approximation dipolaire » signifie que la dimension L_c caractéristique de la variation du champ extérieur avec la position est très grande devant la dimension du dipôle $\frac{L_c}{d} \gg 1$

2.3. Potentiel et champ électrostatique créés par un dipôle

On se place dans le cas d'un doublet de charges. On ne peut pas utiliser le théorème de Gauss pour évaluer simplement le champ, et en déduire le potentiel. On utilise donc la démarche inverse : on calcule le potentiel créé par le dipôle, et on en déduit le champ grâce à la relation locale. On définit un repère en coordonnées sphériques, d'origine O située au milieu du doublet. On pourrait penser à un repère cylindrique, mais à grande distance du dipôle, les deux charges du doublet semblent se confondre pour former un point, et le système sphérique est alors plus adapté.

Le potentiel se calcule de manière *approchée*, en effectuant lorsque c'est nécessaire des développements limités à l'ordre le plus bas non nul en d/r (dans le cadre de l'*approximation dipolaire*).

❖ Montrer que dans le cadre de l'approximation dipolaire, on trouve :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Ces expressions ne sont pas à retenir par cœur. La deuxième formulation est écrite sous forme « intrinsèque », i.e. indépendamment du système de coordonnées. On voit que **seul le moment dipolaire** intervient dans l'expression du potentiel.

Le champ s'en déduit à partir de la relation locale entre potentiel et champ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{bmatrix} 2p \cos \theta \\ p \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

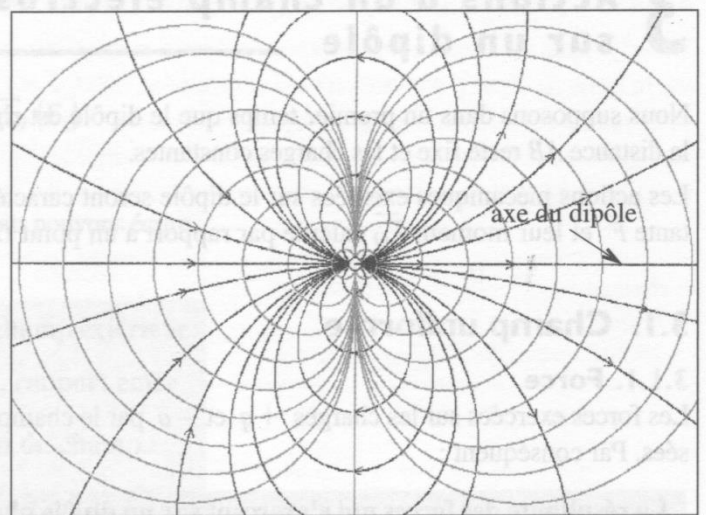
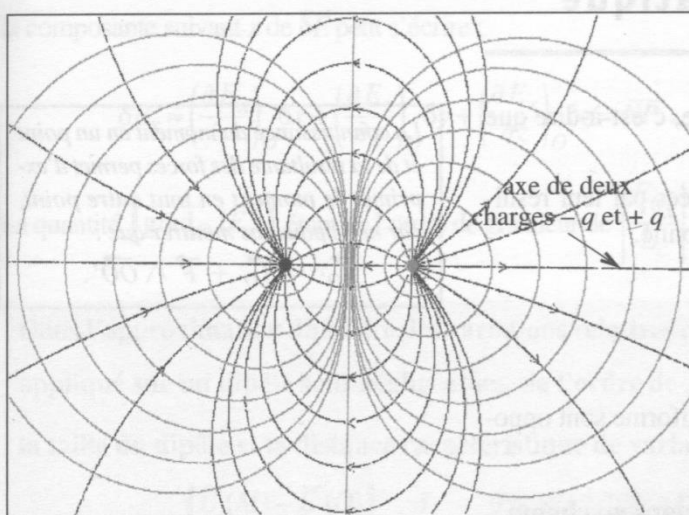
Ces expressions ne sont pas à retenir par cœur. L'écriture sous forme intrinsèque ne fait intervenir que le moment dipolaire du dipôle.

On admettra que ces expressions se généralisent au cas d'une distribution dipolaire quelconque dans le cadre de l'approximation dipolaire.

Dans le cas d'une distribution globalement neutre, et à grande distance de la distribution, le potentiel décroît en $1/r^2$ et le champ en $1/r^3$ (à comparer aux décroissances dans le cas d'une distribution de charge globale non nulle !)

2.4. Topographie du champ et du potentiel créés

La figure de gauche représente les lignes de champ et les surfaces équipotentielles du doublet de deux charges, **hors** de l'*approximation dipolaire*. La figure de droite représente la carte de champ et de potentiel du dipôle **dans** le cadre de l'*approximation dipolaire* : elle est identique à celle de gauche que l'on regarderait de très loin.



2.5. Action d'un champ extérieur *uniforme* sur un dipôle

On considère le dipôle rigide.

Dans un champ électrostatique extérieur **uniforme** $\vec{E}_{0,ext}$:

- La résultante des forces sur le dipôle est **nulle**.
- La résultante du moment des forces (le couple) sur le dipôle **tend à aligner le dipôle** dans la même direction et le même sens que le champ :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{0,ext}$$

- L'énergie potentielle U_{dip} du dipôle soumis au champ extérieur s'écrit :

$$U_{dip} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{0,ext}$$

Les expressions du couple et de l'énergie potentielle montre que :

- Le dipôle aligné dans le même sens que le champ est une *situation d'équilibre stable*.
- Le dipôle aligné dans le sens opposé à celui du champ est une *situation d'équilibre instable*.

2.6. Action d'un champ extérieur *non uniforme* sur un dipôle

On considère le dipôle rigide.

Dans un champ électrostatique extérieur **non uniforme** $\vec{E}_{ext}$ et dans le cadre de l'*approximation dipolaire* :

- La résultante du moment des forces (le couple) sur le dipôle **tend à aligner le dipôle** dans la même direction et le même sens que le champ :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$$

- L'énergie potentielle U_{dip} du dipôle soumis au champ extérieur s'écrit :

$$U_{dip} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

- La résultante des forces sur le dipôle est **non nulle**, le dipôle se déplace vers les **zones de champ fort** :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext}$$

Application : mise en évidence du caractère dipolaire de la molécule d'eau

- ❖ Expliquer la raison pour laquelle la molécule d'eau possède un moment dipolaire.
- ❖ Une règle chargée électriquement (frottée avec de la laine) dévie un filet d'eau. Proposer une explication (NB : une étude plus approfondie montre que cette explication est trop simpliste)

Application : attraction d'objets légers (papier, cheveu) par une règle chargée électriquement

Les constituants d'un corps peuvent ne pas posséder de moment dipolaire permanent. Mais les corps isolants peuvent se *polariser sous l'influence d'un champ électrostatique extérieur*. Les constituants (atomes, molécules) possèdent alors un *moment dipolaire induit*.

- ❖ Expliquer qualitativement pourquoi un cheveu est attiré par une règle frottée.

3. Application du dipôle : interactions ion-molécule et molécule-molécule

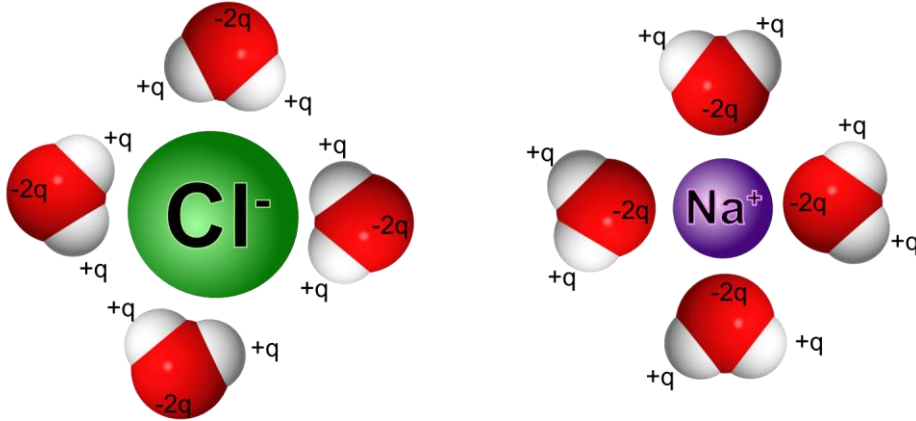
3.1. Moments dipolaires dans la matière

Les atomes et les molécules possèdent souvent un moment dipolaire.

Ce moment dipolaire peut être de plusieurs natures :

- moment dipolaire permanent : H_2O : $p = 1,85 \text{ D}$; NH_3 : $p = 1,49 \text{ D}$.
- moment dipolaire induit dans un atome ou une molécule

3.2. Interaction ion-molécule : solvation



Un ion génère un champ électrique. En supposant, pour simplifier, que la répartition de la charge est à symétrie sphérique, le champ créé est identique à celui d'une charge ponctuelle. Les lignes de champs convergent/divergent vers/depuis l'ion (selon si c'est un anion/cation).

❖ A l'aide du modèle du dipôle, expliquer qualitativement l'origine du phénomène de solvation

On notera qu'une fois entouré par des molécules d'eau, l'ion influe moins sur son environnement, car le champ électrique qu'il crée est diminué par la présence des molécules d'eau. Dans l'exemple représenté, c'est la raison pour laquelle les ions Na^+ et Cl^- ne s'attirent plus suffisamment pour se recombiner.

❖ En dessinant le champ électrique créé par une molécule d'eau en son sein (NB : donc hors de l'approximation dipolaire), montrer qu'il s'oppose à celui de l'ion, expliquant ainsi l'affirmation précédente

3.3. Interaction molécule – molécule : Van der Waals

Il existe trois types d'interactions, dites de **Van der Waals** :

- dipôle permanent – dipôle permanent : interactions de Keesom
- dipôle permanent – dipôle induit : interactions de Debye
- dipôle induit – dipôle induit : interactions de London

Ces trois interactions décroissent en $1/r^7$ avec la distance r entre les deux dipôles.

On peut le démontrer ci-dessous dans le cas de Debye (les deux autres cas sont plus compliqués).

3.4. Dipôle induit : polarisabilité dans le modèle de Thomson

En présence d'un champ électrique extérieur, un atome ou une molécule peuvent acquérir un moment dipolaire. On dit qu'ils se **polarisent**.



En général, le champ extérieur est faible comparé au champ électrostatique créé par le noyau et agissant sur le nuage électronique (odg 10^{11} Vm^{-1}). Comme souvent en physique, la conséquence est alors proportionnelle à la cause : le déplacement relatif entre le barycentre des charges négatives et celui des charges positives est proportionnel au champ extérieur. Ainsi, le moment dipolaire peut s'écrire :

$$\vec{p} = \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}_{ext}$$

Cette écriture définit **la polarisabilité α** , c'est simplement un coefficient de proportionnalité entre la cause et l'effet (à la permittivité du vide près).

❖ Déterminer l'unité de la polarisabilité, et remarquer l'intérêt d'insérer ϵ_0 dans la définition de la polarisabilité

Remarque : Une molécule peut posséder un moment dipolaire permanent et un moment dipolaire induit. Mais en général le moment induit est bien plus faible que le moment permanent et peut être négligé.

Modèle de l'atome de Thomson

Pour évaluer l'ordre de grandeur de la polarisabilité d'un atome, on se donne ci-dessous un modèle simple de l'atome : le **modèle de Thomson**. Ce modèle est faux et a été proposé avant les expériences de Rutherford, qui ont montré que la charge positive était concentrée au centre des atomes. On l'adopte ici car il permet d'obtenir simplement l'ordre de grandeur recherché.

Dans ce modèle, la charge positive Ze de l'atome est uniformément répartie dans une sphère de rayon a , dans laquelle les électrons sont « élastiquement liés » au centre de la sphère.

❖ Quelle est la position d'équilibre des électrons lorsque l'atome ne subit aucune action extérieure ?
❖ Montrer dans le cadre de ce modèle qu'un électron de l'atome est « élastiquement lié » au centre de la sphère par la force électrostatique exercée par la charge positive de l'atome.

❖ Dans le cas où un champ extérieur $\vec{E}_{ext}$, supposé uniforme à l'échelle de l'atome, est appliqué, trouver la position d'équilibre des électrons. En déduire le moment dipolaire ainsi créé.

❖ En déduire une expression de la polarisabilité, et l'associer au volume de l'atome

Pour l'atome d'H on obtient : $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$

La valeur expérimentale est : $\alpha = 8,4 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$

(HPgm) Dans le cadre du modèle de Thomson, on peut aussi montrer que l'interaction de Debye est en $1/r^7$.

⊛ Montrer que l'énergie potentielle d'interaction est en $1/r^6$

⊛ En utilisant une formule vue en mécanique des fluides : $(\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{E^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \wedge \vec{E}$, montrer que la force est en $1/r^7$

4. Energie électrostatique de constitution d'un noyau atomique

Les interactions électrostatiques entre les zones du noyau chargées positivement sont répulsives, et une autre interaction doit nécessairement exister pour vaincre cette répulsion : c'est **l'interaction (nucléaire) forte**. Il s'agit ici d'estimer l'énergie électrostatique du noyau atomique, donnant ainsi un ordre de grandeur de l'énergie d'interaction forte puisque cette dernière doit surpasser (en valeur absolue) celle associée à la répulsion électrique.

4.1. Première approche : analyse dimensionnelle

Définition de l'énergie électrostatique de constitution du noyau

C'est le travail qu'il faut fournir pour apporter toute la charge positive depuis l'infini pour constituer le noyau. Dans l'état initial, la charge à l'infini est immobile. Elle l'est aussi dans l'état final.

On modélise le noyau par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume, de charge totale $Q = Ze$.

❖ Par analyse dim, établir l'expression de cette énergie, à un facteur adim près, en fonction de Q , ϵ_0 et R

4.2. Calcul par adjonction progressive de charges

On admet que la façon dont on constitue progressivement la sphère chargée n'influe pas sur l'expression recherchée. On rappelle que la matière chargée se situe initialement à l'infini et est immobile.

- ❖ Exprimer la charge volumique ρ_0 du noyau, une fois celui-ci constitué
- ❖ On suppose qu'une sphère de rayon r a déjà été constituée. Exprimer la charge de cette sphère.
- ❖ Exprimer le volume de matière chargée à apporter pour faire croître le rayon de cette sphère de dr . Exprimer la charge dq de ce volume à apporter
- ❖ En remarquant que cette matière chargée supplémentaire était initialement immobile, et est immobile dans l'état final, calculer le travail que doit fournir un opérateur pour apporter cette charge à la surface de la sphère de rayon r déjà constituée (on prendra comme convention que le potentiel électrique créé par la sphère de rayon r est nul à l'infini)
- ❖ En déduire le travail total apporté pour constituer le noyau : $\frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$
- ❖ Application numérique :
On suppose que la densité de matière nucléaire est identique pour tous les noyaux, ainsi le volume du noyau est proportionnel au nombre de masse A : $R = R_0 A^{1/3}$ avec $R_0 = 1,2 \text{ fm} = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.
Calculer l'énergie de constitution pour le Cobalt ${}^{60}_{27}\text{Co}$ et l'uranium ${}^{235}_{92}\text{U}$

5.2.2. Exemples de champs électrostatiques	
Dipôle électrostatique. Moment dipolaire.	Citer les conditions de l'approximation dipolaire.
Potentiel et champ créés par un dipôle.	Établir l'expression du potentiel électrostatique. Comparer la décroissance du champ et du potentiel avec la distance dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ électrostatique engendrées par un dipôle.
Actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle placé dans un champ électrostatique d'origine extérieure.
Énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.
Interactions ion-molécule et molécule-molécule.	Expliquer qualitativement la solvation des ions dans un solvant polaire.
Dipôle induit. Polarizabilité.	Associer la polarizabilité et le volume de l'atome en ordre de grandeur.
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.