Exercices – Ondes sonores dans les fluides

Exercice 1 : Etablissement de l'équation d'onde en considérant une particule de fluide

Etablir l'équation d'onde via le champ de déplacement
Se confronter à un énoncé de concours

Le fluide est supposé parfait, son mouvement est décrit sans prendre en compte les effets de viscosité et les échanges thermiques à l'intérieur du fluide. Les détentes et compressions locales du fluide sont isentropiques ; V(P) étant le volume du fluide et P sa pression, le coefficient de compressibilité isentropique, constant pour le fluide, s'écrit :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

La propagation des ondes sonores est associée à un écoulement irrotationnel. Les effets de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Un tuyau cylindrique horizontal infini de section S_0 constante et d'axe x'x (figure 1) contient un fluide parfait compressible qui, au repos, possède une masse volumique μ_0 et se trouve à la pression P_0 et à la température T_0. Ces grandeurs sont uniformes dans l'espace.

L'équilibre est perturbé par le passage d'une onde acoustique plane qui se propage dans le cylindre suivant la direction Ox. La perturbation unidirectionnelle ne dépend ainsi que de l'abscisse x le long du « tuyau sonore » et du temps t. Dans le milieu perturbé, u(x,t) représente le déplacement à l'instant t du fluide situé au repos à l'abscisse x.

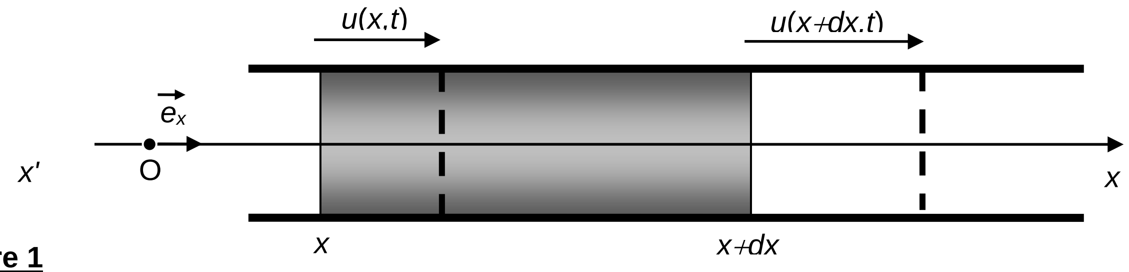


Figure 1

Les champs de pression et de masse volumique dans le fluide dépendent du temps et de l'espace ; ils peuvent s'écrire sous la forme :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \qquad |p(x,t)| << P_0$$

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad |\mu_1(x,t)| << \mu_0$$

La vitesse acoustique, ou vitesse vibratoire en un point d'abscisse x, est liée au déplacement du fluide et définie par : $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,\vec{e}_x$.

L'étude est effectuée dans le cadre de « l'approximation acoustique » limitée aux mouvements de faible amplitude : le déplacement u(x,t), la vitesse acoustique $v(x,t)$, la pression acoustique (ou surpression) p(x,t) et la variation de masse volumique du fluide $\mu_1(x,t)$ ainsi que leurs dérivées sont des infiniment petits du premier ordre.

La linéarisation consiste à ne garder dans les équations que les termes d'ordre un en p, v et μ_1.

A1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide de volume S_0dx subissant la perturbation, établir à l'ordre un l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0\frac{\partial v}{\partial t}$$

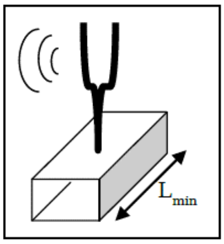
A2. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume de la tranche de fluide S_0dx entre l'état de repos et l'état perturbé. En déduire la surpression correspondante : $p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial u}{\partial x}$ et sa dérivée par rapport au temps : $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial v}{\partial x}$.

A3. Etablir l'équation de propagation relative à la surpression p(x,t) : $\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{C^2}\dfrac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}$.

Donner l'expression de la vitesse de propagation C de l'onde acoustique le long de l'axe Ox en fonction de χ_S et μ_0.

Exercice 2 : Résonateur de diapason

Application des résultats sur les tuyaux sonores



Un diapason est constitué d'un dispositif en métal fixé sur un résonateur en bois de longueur L, fermé d'un côté et ouvert de l'autre.
Quelle doit être la longueur de cette cavité pour que le fondamental des vibrations de la partie métallique à 440 Hz fasse entrer en résonance le résonateur ?

Exercice 3 : Tuyau d'orgue (CCP)

Application directe du complément de cours sur la propagation en tuyau (à faire seul)

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur l = 1,00 m fermé à une extrémité et ouvert à l'autre.
Les pression, température et masse volumique moyenne de l'air ($\gamma = 1{,}4$) contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\rho_0 = 1{,}22$ kg.m^{-3}
On appelle ξ le champ de déplacement (cf. ex1), représentant l'« élongation » d'une particule de fluide. On rappelle que $v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t)$

1. Déterminer les fréquences f_0 du fondamental et f_1 du premier harmonique.
2. A la fréquence f_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air égale à a_0 = 1 mm. En déduire l'amplitude maximale correspondante :

- p_{max} pour la surpression ;
- τ_0 pour la température.

Réponses : f_0 = 85,3 Hz ; p_{max} = 668 Pa ; τ_0= 0.55 K.

Exercice 4 : Amortissement par rayonnement (difficile)

Exploiter mathématiquement le fait qu'une onde soit progressive
Raisonnement énergétique : conversion d'énergie mécanique d'un piston en « énergie rayonnée »

On considère un piston de section S et de masse m sans frottements dans un tube horizontal ouvert en x = 0 et se prolongeant à l'infini. L'air contenu dans le tube a une masse volumique ρ et une onde acoustique une célérité C.

A l'instant initial $t = 0$, le piston est lancé de l'abscisse x = 0 avec une vitesse initiale u_0 vers les x croissant ; on note u(t) sa vitesse à un instant t. On constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie que l'on supposera faible *de manière à considérer que l'abscisse du piston reste approximativement nulle*.

Le mouvement du piston engendre une onde progressive plane décrite par la vitesse v(x,t) et la surpression p(x,t). Pour simplifier, on suppose que la pression à gauche du piston reste égale à P_0.

0. L'air initialement au contact du piston reste à son contact à tout instant ultérieur. Traduire mathématiquement cette condition à la limite.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston.
2. En exploitant la notion d'impédance, en déduire que : $m\dfrac{du(t)}{dt} = -\rho C S u(t)$
En déduire l'expression de u(t). Définir un temps caractéristique et commenter ses variations avec m et S.
3. En invoquant le fait que l'onde engendrée est progressive, déduire de l'expression de u(t) celle de v(x,t).
La représenter graphiquement en fonction de x à un instant $t = t_0$ fixé.
4. Calculer la densité volumique d'énergie de l'onde ; par intégration sur tout le volume occupé par l'onde à un instant t, établir l'expression générale de l'énergie totale de l'onde à un instant t en fonction de m, u0 et u(t). Interpréter physiquement le résultat, et expliquer pourquoi le piston s'arrête malgré l'absence de frottement.