

Mécanique – TD1 : Cinématique du point

Exercice 1 : Trajectoire d'un ballon-sonde

On étudie le mouvement d'un ballon-sonde dans le référentiel lié à la Terre. Le ballon-sonde M , lâché au niveau du sol, s'élève avec une vitesse verticale constante de norme v_0 . Le vent lui communique une vitesse horizontale de direction et de sens constants et de norme proportionnelle à l'altitude du ballon.

1. Faire un schéma de la situation étudiée. Définir le repère approprié pour repérer le mouvement, et l'orienter convenablement.
2. On cherche à exprimer mathématiquement les hypothèses de l'énoncé. Donner une expression mathématique du vecteur vitesse du ballon-sonde au cours de son mouvement. Pour exprimer la composante horizontale, on introduira une constante τ homogène à un temps.
3. Etablir les deux équations différentielles vérifiées par les coordonnées du point M .
4. En déduire les équations horaires de la trajectoire du ballon-sonde.
5. Déterminer l'équation de la courbe suivie par le ballon-sonde dans l'espace au cours de son mouvement. Quelle est la nature de la trajectoire ?
6. Exprimer les composantes du vecteur accélération dans le système de coordonnées retenu pour l'étude.

Exercice 2 : Choisir le bon référentiel

Une rivière a une vitesse d'écoulement supposée uniforme (i.e. identique en tout point) et constante (i.e. indépendante du temps). Un bateau à moteur, qui circule dans le sens du courant, dépasse un radeau en un point A. Le radeau n'est pas motorisé et se déplace avec le courant de la rivière. Une demi-heure après, le bateau fait demi-tour. Il remonte le courant et croise le radeau en un point B situé à 3 km en aval du point A. Déterminer la vitesse du courant en supposant que la vitesse du bateau *par rapport au courant* est constante.

Exercice 3 : Mouvement circulaire

Une particule se déplace sur un cercle de rayon R à la vitesse angulaire constante de valeur absolue ω_0 . A la date $t = 0$, elle commence à ralentir avec une accélération angulaire constante de valeur absolue α_0 .

1. Quelle est la dimension de α_0 ?
2. Faire un schéma de la situation étudiée. Définir le repère approprié pour repérer le mouvement.
3. Donner l'expression mathématique du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
4. Quelle est la durée au bout de laquelle la particule s'arrête ? Quelle distance aura-t-elle alors parcourue durant la phase de décélération ?

Exercice 4 : Course poursuite

Une voiture C roule à la vitesse constante $v_0 = 90 \text{ km.h}^{-1}$ sur une route horizontale et droite. Un motard M , qui démarre à l'instant $t = 0$ où la voiture passe à sa hauteur (au point A), accélère uniformément. Il atteint une vitesse de 90 km.h^{-1} au bout de $t = 10 \text{ s}$.

1. Quel temps T faut-il au motard pour rattraper la voiture ?
2. Quelle sera alors la distance d parcourue par le motard ?
3. Quelle sera alors la vitesse v_I acquise par le motard ?

Exercice 5 : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui se situe dans le plan équatorial, qui tourne dans le même sens et avec la même vitesse angulaire que la Terre autour d'elle-même.

Le mouvement d'un satellite géostationnaire est circulaire uniforme. Le centre de l'orbite est le centre de la Terre.

On admet que la norme de l'accélération du satellite est donnée par l'expression : $a = g \left(\frac{R}{r} \right)^2$,

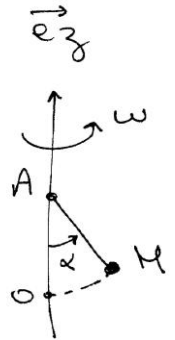
où $R = 6400 \text{ km}$ est le rayon de la Terre, r le rayon de l'orbite du satellite et $g = 9,8 \text{ m.s}^{-1}$ l'accélération de la pesanteur.

1. Montrer que le vecteur accélération est nécessairement radial (i.e. composante orthoradiale est nulle)
2. Quelle est le signe de la composante radiale de l'accélération ? Quelle est la relation entre la norme de l'accélération et sa composante radiale ?
3. Calculer la période de rotation de la Terre sur elle-même, puis la vitesse angulaire de rotation.
4. Déterminer alors l'altitude de l'orbite géostationnaire.

Exercice 6 : Rotation autour d'un axe

Un point matériel suspendu au bout d'un fil est en rotation autour de l'axe vertical, avec une vitesse angulaire ω constante. L'angle α que forme le fil avec la verticale est constant au cours du mouvement.

Déterminer la vitesse et l'accélération du point matériel.



Exercice 7 : Mouvement hélicoïdal

Un point M, repéré par ses coordonnées cartésiennes, effectue un mouvement d'équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\omega t) \\ z(t) = kt \end{cases} \quad \text{où } R, \omega \text{ et } k \text{ sont des constantes positives}$$

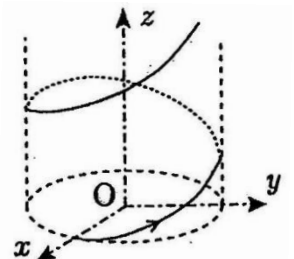
1. Faire un schéma et représenter le repère cartésien. Représenter le repère cylindrique le plus adapté à l'étude de ce mouvement. Déterminer les équations horaires de la trajectoire en coordonnées cylindriques.

2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans la base mobile du repère cylindrique.

3. En déduire la norme de la vitesse. Comment peut-on qualifier ce mouvement ?

4. Calculer la norme de l'accélération.

5. Montrer que l'angle α formé par le vecteur vitesse avec le plan horizontal est constant.



Exercice 8 : Trajectoire conique

Un point matériel M, repéré par ses coordonnées cartésiennes, effectue un mouvement défini par les équations horaires suivantes ($t \geq 0$) :

$$\begin{cases} x(t) = \exp(t) \sin(t) \\ y(t) = \exp(t) \cos(t) \\ z(t) = \exp(t) \end{cases}$$

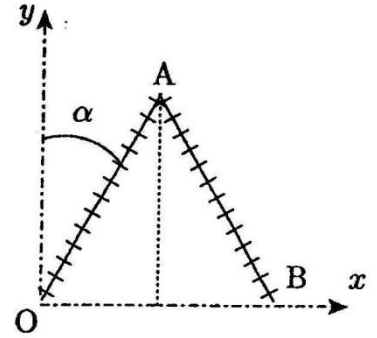
1. En quel point M_0 le point M se trouve-t-il à l'instant $t = 0$? Justifier le fait que le point M s'éloigne à l'infini de sa position initiale.

2. Exprimer la norme $v(t)$ de la vitesse ainsi que la norme $a(t)$ de l'accélération du point M.

3. Déterminer l'angle $\alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u_z})$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 : Escabeau en chute

Un escabeau est posé sur le sol, un des points d'appui restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'escabeau à l'instant t est repérée par l'angle $\alpha(t)$ formé par la portion OA de l'escabeau avec le mur. L'extrémité B de l'escabeau glisse sur le sol. L'escabeau est tel que $OA = AB = L$.



1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point A dans un repère en coordonnées polaires que l'on aura préalablement défini. On exprimera ces composantes en fonction de L , α et des dérivées de α par rapport au temps.

2. Exprimer dans le système de coordonnées cartésiennes les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point B, en fonction de L , α et des dérivées de α par rapport au temps.

Exercice 10 : Roue de vélo

On considère la roue avant d'un vélo, de centre G et de rayon a , qui se déplace sur un sol horizontal à la vitesse constante v_0 par rapport au sol. On étudie le mouvement d'un point M du pneu lié à la roue. Le référentiel d'étude est le référentiel lié au sol.

1. Faire un schéma de la situation étudiée. Représenter les trois repères suivants :

- un repère cartésien R_1 lié au référentiel d'étude
- un repère cartésien R_2 d'origine G et dont les axes sont orientés comme ceux de R_1
- un repère cylindrique d'origine G

2. Déterminer l'expression de la vitesse du point M par rapport au sol en fonction de a , v_0 et $\dot{\theta}$.

3. On suppose que la roue effectue un mouvement de roulement sans glissement (la roue ne « dérape » pas). Etablir la relation entre v_0 et $\dot{\theta}$ dans ce cas.

4. Dans le cas d'un roulement sans glissement, tracer l'allure de la trajectoire du point M dans le référentiel d'étude.

Exercice 11 : Sauvetage à la plage et lois de Descartes...

Un enfant dans l'eau est entrain de se noyer, et un secouriste situé sur la plage souhaite lui porter secours. Connaissant les positions respectives de l'enfant et du sauveteur, on cherche à déterminer quel chemin doit parcourir le secouriste pour atteindre l'enfant le plus rapidement possible.

La position initiale du secouriste est repéré par le point S ; celle de l'enfant par le point E.

On fait les hypothèses suivantes :

- la démarcation entre la plage et la mer est une droite (D) horizontale
- la mer est immobile par rapport à la plage
- l'enfant est immobile dans l'eau
- sur la plage, le secouriste se déplace à une vitesse constante v_1
- dans l'eau, le secouriste se déplace à une vitesse constante v_2 ($v_2 < v_1$)

Situation à l'instant $t = 0$, instant où le secouriste va commencer à courir vers l'enfant :

- le secouriste se trouve à une distance L de la mer (i.e. de la droite (D))
- l'enfant est situé à une distance d de la plage (i.e. de la droite (D))
- Soient H (respectivement H') le projeté orthogonal de S (resp. de E) sur (D). La distance HH' vaut Δ .

1. Faire un schéma de la situation étudiée. Par un raisonnement qualitatif (donc sans calculs), représenter approximativement le chemin qui minimise le temps d'intervention du secouriste.

2. On appelle B le point d'entrée du secouriste dans l'eau qui minimise le temps d'intervention. On repère sa position sur la droite (D) par rapport à H par la variable x . Déterminer l'équation vérifiée par x . *On ne la résoudra pas.*

3. Le trajet SB fait un angle i_1 avec la normale à (D) ; le trajet BE fait un angle i_2 avec la normale à (D). Démontrer, grâce à la relation vérifiée par x , la relation $\frac{\sin(i_1)}{v_1} = \frac{\sin(i_2)}{v_2}$. Cette relation vous rappelle-t-elle une loi physique connue ?