DM1 -- Mécanique du point matériel *(à rendre le 08/09)*

Problème 1 : Modélisation d'un oscillateur *(extrait petites Mines 2008)*

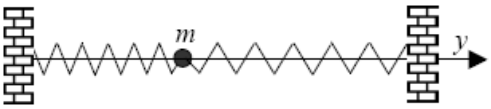
Soit un point matériel de masse m, en mouvement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme.

1. Étude énergétique d'un oscillateur

1.1. Définir l'énergie potentielle associée à une force $\vec{F}$. Pour une force de rappel élastique de constante de raideur k, déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'écart x à la position d'équilibre, à une constante additive près.

1.2. On considère un mouvement conservatif de m sur l'axe horizontal Oy, autour d'une position d'équilibre Y_0. L'expression de l'énergie potentielle est connue : $E_p(y) = E_0 + \alpha(y - Y_0)^2$, où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle de ce mouvement, et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période en fonction de m et α.

1.3. Application : considérons le dispositif horizontal de la figure suivante.



Les ressorts sont identiques, de raideur k et de longueur à vide L_0, tandis que les points d'attache sont distants de $2L_0$.

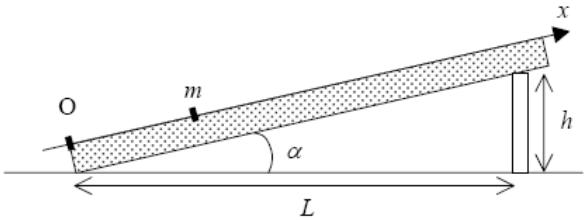
- Définir ce qu'est une position d'équilibre.
- Expliquer pourquoi la position d'équilibre se trouve au milieu du dispositif.
- Exprimer $E_p(y)$ si y désigne l'écart à la position d'équilibre.
- En utilisant le résultat 1.2, calculer numériquement la période T_0 des oscillations du point matériel si m = 200 g et k = 40 N.m^{-1}.

1.4. On envisage l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse de m par rapport à l'axe du mouvement : $\vec{F} = -m\beta\vec{v}$ où β est une constante positive. Donner la dimension ou l'unité SI de β.

1.5. Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la valeur numérique maximale de β permettant les oscillations de m ?

2. Modélisation d'un dispositif expérimental

2.1. On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O, et un autre aimant, de masse m, est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à

une force notée $\vec{F}$, prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente. Faire un bilan des forces à l'équilibre, et représenter ces forces sur un schéma.

2.2. Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme :

$$\vec{F}(x) = k\left(\frac{x_0}{x}\right)^n \overrightarrow{e_x}$$

avec $k > 0$ et n entier.

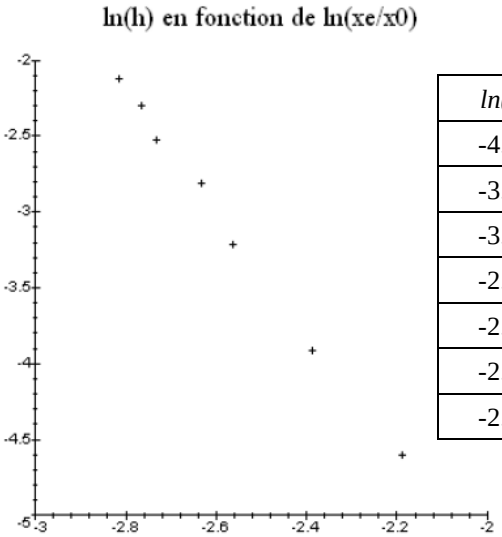
Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_e en fonction de x_0, k, m, g, L, h et n dans le cas des petits angles ($\sin\alpha \approx \alpha$, $\tan\alpha \approx \alpha$ et $h << L$).

NB : ***cette approximation sera toujours utilisée dans toute la suite du problème***

2.3. On mesure x_e pour différentes cales, puis on représente ln(h) en fonction de ln(x_e / x_0).

En prenant $x_0 = 1m$, déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k.

On donne :
$L = 120\ cm$; $m = 189\ g$; $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.



ln(h)	*ln(x_e / x_0)*
-4.61	-2.19
-3.91	-2.39
-3.22	-2.56
-2.81	-2.63
-2.53	-2.73
-2.30	-2.76
-2.12	-2.81

2.4. Déterminer l'expression littérale de l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de m, à une constante additive près, en fonction de x, x_0, k, m, g, L, h et n, puis en fonction de x, x_0, x_e, k et n seulement.

2.5. Lorsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre x_e, on admet qu'on peut utiliser pour l'énergie potentielle un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{(x-x_e)^2}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e)$$

En déduire une expression de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre sous la forme : $\frac{1}{2}K(x-x_e)^2 + cste$; le détail de la constante additive n'est pas demandé, mais on exprimera la constante K en fonction de x_e, x_0, k et n.

2.6. En déduire qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente.

2.7. Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera ; en déduire une méthode de mesure de n que l'on décrira succinctement.

<u>Problème 2</u> : Accéléromètre d'un stabilisateur d'images *(petites Mines 2008)*

Les appareils photo reflex numériques, même ceux d'entrée de gamme, sont aujourd'hui équipés d'accéléromètres pour la stabilisation d'image. Cela permet, en particulier sur les longues focales, de stabiliser la visée. Il est alors plus facile de faire le point sur un sujet très lointain et il est plus aisé de soigner son cadrage, les tremblements du photographe étant amortis.

On se propose, dans cette partie, d'étudier le fonctionnement d'un accéléromètre à détection capacitive, ce système étant le plus répandu actuellement. Son principe est décrit ci-après :

Une poutre suspendue appelée « masse sismique » constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'autre armature est solidaire de l'appareil photo dont on veut mesurer l'accélération (voir figure 4). Les variations de capacité liées au déplacement de la masse sismique permettent de suivre son mouvement.

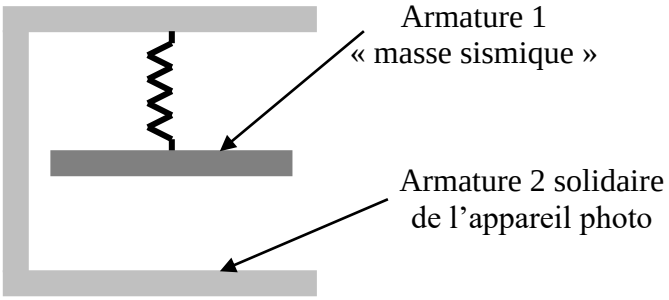


Figure 4

On modélise la structure mécanique étudiée par une masse ponctuelle M de masse m, suspendue à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée en O au bâti solidaire de l'appareil photo (voir figure 5). Les amortissements sont modélisés par une force de frottement de la forme : $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\left(\overrightarrow{v_M}\right)_{\Re ap}$ où $\left(\overrightarrow{v_M}\right)_{\Re ap}$ représente la vitesse du point M dans le <u>référentiel de l'appareil photo</u>.

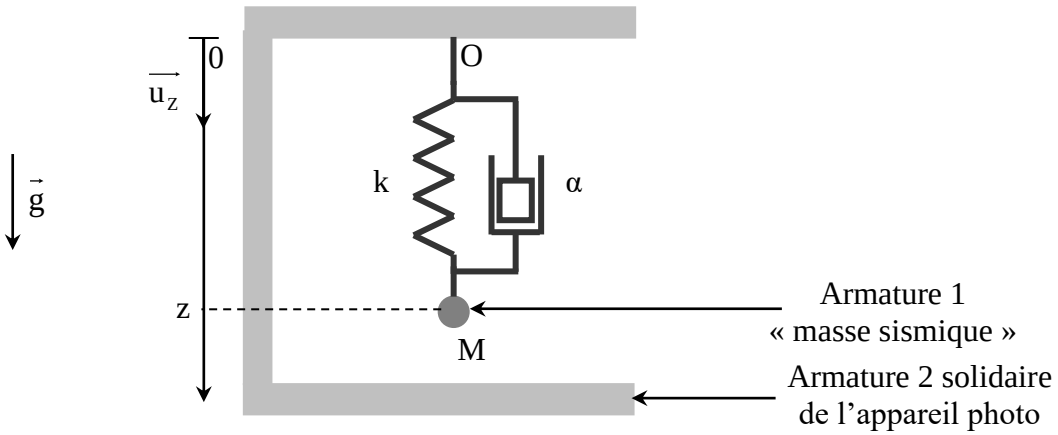


Figure 5

On s'intéresse à la détermination de l'amplitude Z_O de la vibration engendrée par le tremblement du photographe.
On considère pour cela que le point O oscille verticalement (à la pulsation ω, avec une amplitude Z_O) <u>dans le référentiel terrestre</u> considéré comme galiléen. Sa position y est repérée par sa cote $z_O(t) = Z_O \cos(\omega t)$.
La position de la masse M est repérée <u>dans le référentiel de l'appareil photo</u> par **sa cote *z***.

1. On note z_{eq} la position d'équilibre de la masse M par rapport à l'appareil en l'absence de vibration. Déterminer son expression en fonction de ℓ_0, m, g et k.

2.1. En présence de vibrations, le référentiel de l'appareil photo est-il galiléen ? Justifier la réponse.

2.2. Etablir dans ce cas l'équation différentielle du mouvement de la masse M dans le <u>référentiel de l'appareil photo</u> en faisant apparaître les paramètres α, k, m, z_{eq}, ω et Z_O.

On note $\mathbf{Z = z - z_{eq}}$ la position de la masse M par rapport à sa position d'équilibre dans l'accéléromètre.

3. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = Z_O \omega^2 \cos(\omega t)$$

Nommer ω_0 et Q. Préciser leurs dimensions et leurs expressions en fonction de m, α et k.

On s'intéresse maintenant au mouvement de la masse en régime établi.

4. Expliquer pourquoi Z(t) peut se mettre sous la forme $Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \varphi)$. Préciser le nom des différents termes apparaissant dans cette expression.

5. Etablir l'expression de Z_M en fonction de Z_O, Q et de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Il est conseillé d'utiliser les notations complexes. Quelle est la nature du filtre associé à $Z_M(x)$?

6. Montrer que la courbe $Z_M(x)$ passe par un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et préciser l'expression x_r de x lorsque Z_M passe par ce maximum. Comparer x_r et 1.

7. Etudier les asymptotes basse et haute fréquences de $Z_M(x)$ puis tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $Z_M(x)$ pour $Q_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q_3 > Q_2$ en portant une attention particulière au positionnement des maxima.

8. Comment faut-il choisir le facteur de qualité du système et sa pulsation propre pour qu'il fonctionne sur une plage de fréquences de tremblements la plus large possible ?

<u>Fin de l'énoncé</u>