MPonts PC 2016 : Millenium Bridge
partie III

/27

14. Onde stationnaire

[1]

Qu° étrange ... c'est une famille de sol° possibles du pt vue math.
Du pt de vue φ^{ic}, p.ê. énoncé fait-il réf aux CLimites ?...

15. On réinjecte :

[7]

$$\rho S g''(t) f(x) + IE f^{(4)}(x) g(t) = 0$$

on sépare variables x et t :

$$\boxed{\frac{\rho S}{IE} \frac{g''}{g} = -\frac{f^{(4)}}{f}}$$

F

$\underbrace{}_{f° t}$ $\underbrace{}_{f° x}$ les deux termes sont donc indpts de x et t $\Rightarrow \boxed{= \alpha}$ (C^{te})

$$\boxed{g'' - \frac{\alpha}{F} g = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{f^{(4)} + \alpha f = 0}$$

$g(t)$: si $\frac{\alpha}{F} > 0$, alors $g(t)$ somme d'exponentielles

si $\alpha < 0$, alors $g(t)$ sinusoïdale

~~seule ce 2^e cas est compatible avec CLimites~~

Le 1^{er} cas n'est pas φ^{ic t} acceptable :

- L'exponentielle croissante est synonyme de divergence du mvt en f° du tps
- l'exponentielle décroissante n'est pas compatible avec les obs°, car on observe que ça oscille, et "$e^{-t/\tau}$" n'oscille pas.

d'où $\boxed{\alpha < 0}$

$$\boxed{g'' + \omega^2 g = 0} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{-\frac{\alpha IE}{\rho S}}$$

$$\boxed{g(t) = G\cos(\omega t + \varphi)}$$

→ 4 C^{tes} pour $f(x)$ car ordre 4, mais $(G \times ces\ C^{tes})$ compte pour 4, donc faut rajouter que φ pour $g(t)$: $\boxed{5}$

16. [6] polynôme χ^{ic} : $r^4 + \alpha = 0$ $\boxed{2}$

$r^4 = -\alpha > 0$

$r^2 = \pm\sqrt{-\alpha}$

$r^2 = \sqrt{-\alpha}$ $\quad$ $r^2 = -\sqrt{-\alpha}$

$\boxed{r = \pm(-\alpha)^{1/4}}$, $\boxed{r = \pm i(-\alpha)^{1/4}}$

$r_1, r_2 = -r_1$ $\quad$ 4 sol° . $\quad$ r_3 et $r_3^* = -r_3$

$$f(x) = A' e^{r_1 x} + B' e^{-r_1 x} + C' e^{i r_3} + D e^{-i r_3}$$

Or $\left| \begin{array}{l} ch(r_1 x) = \dfrac{e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}}{2} \\ sh(r_1 x) = \dfrac{e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}}{2} \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} e^{r_1 x} = ch + sh \\ e^{-r_1 x} = ch - sh. \end{array}$

~~Or $\cos(r_3 x) = \dfrac{e^{i r_3 x} + e^{-i r_3 x}}{2}$, $\sin(\;) = \dfrac{- - -}{2}$~~

Pour r_3 et r_3^*, cf. rég. pseudopér :

$$A \cos(\mathrm{Im}\{r_3\} x) + B \sin(\mathrm{Im}\{r_3\} x)$$

car de cette façon, la sol° $f(x)$ est réelle.

C.I.C° : $f(x)$ a la forme de énoncé

$$\boxed{f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\,ch(\beta x) + D\,sh(\beta x)}$$

avec $\beta = (-\alpha)^{1/4}$

Or $\dfrac{\omega^2 \rho S}{IE} = -\alpha$, d'où $\boxed{\beta = \left(\dfrac{\omega^2 \rho S}{IE}\right)^{1/4}}$

17. [6] $f(0) = 0 \iff \boxed{A + C = 0}$

$f(L) = 0 \iff \left| \begin{array}{l} A\cos(\beta L) + B\sin(\beta L) \\ + C\,ch(\beta L) + D\,sh(\beta L) = 0 \end{array} \right.$

$f''(0) = 0 \iff -\beta^2 A + \beta^2 C = 0$

$\iff \boxed{A = C} \implies \boxed{\begin{array}{l} A = 0 \\ C = 0 \end{array}}$

$f''(L) = 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} -B\beta^2 \sin(\beta L) \\ + D\beta^2 sh(\beta L) = 0 \end{array}}$

donc $\left| \begin{array}{l} B\sin(\;) + D\,sh(\;) = 0 \\ B\sin(\;) - D\,sh(\;) = 0 \end{array} \right.$

somme et différence donnent : $\boxed{3}$

$B \sin(\beta L) = 0$ et $D\, \underbrace{sh(\beta L)}_{\text{non nul (sauf "en zéro")}} = 0$

$\boxed{\sin(\beta L) = 0}$ sinon pas d'onde ! $(B \neq 0 !)$

$\boxed{D = 0}$

d'où $\boxed{\beta_n L = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*}$

$$\frac{\omega_n^2 \rho S}{IE} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{IE}{\rho S}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) : 1 ventre, 0 noeud (sauf bords)

c) : 2 —, 1 —

e) : 3 —, 2 —

f) : 4 —, 3 —

Or $f(x) = B \sin(\beta_n x)$

$= B \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$

$n = 1$: 1 ventre → a

$n = 2$: 2 — → c

$n = 3$: e

$n = 4$: f.

18. $\boxed{4}$ Chps considérés 1D dans cette sec° $\psi(\vec{x}, t)$, donc modes $\boxed{d, g, h, b}$ ne correspondent pas à notre étude.

19. $\boxed{3}$ $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \left(\frac{4 \times 1{,}07^3 \times 69\,10^9}{12 \times 2{,}7\,10^3 \times 4 \times 1{,}07}\right)^{1/2} \frac{\pi}{2 \times 322^2}$

$f_1 = 0{,}02$ Hz

$f_2 = 4 f_1 = 0{,}08$ Hz

$f_3 = 0{,}18$ Hz

$f_4 = 0{,}32$ Hz

$f_{\text{piéton}} \sim 1$ Hz ... $\boxed{\text{faudrait } n = 7\text{-}\boxed{8}}$ pour résonance

→ Pied droit / pied gauche excite latéral^t, de l'ordre du Hz.