Chap.1 Annexe calculs (hors programme)
Changements de référentiels – Cinématique

3.1. Loi de composition des vitesses (cas translation)

Voici les différentes étapes de la démonstration (HP) :

A. Définir précisément les vitesses $\vec{v}_{M/R_1}$ et $\vec{v}_{M/R_2}$
   - $\vec{v}_{M/R_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R_1}$; $\vec{v}_{M/R_2} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{R_2}$

B. Expliquer pourquoi la dérivée de $\overrightarrow{O_2M}$ calculée dans R_1 est égale à celle calculée dans R_2
   - *R_2 étant en translation* dans R_1, on peut prendre $\overrightarrow{e_x}' = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}' = \overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}' = \overrightarrow{e_z}$. Ainsi, on peut dériver un vecteur par rapport au temps indifféremment dans R_1 ou dans R_2

C. Ecrire la relation entre les deux vecteurs positions $\overrightarrow{O_1M}$ et $\overrightarrow{O_2M}$ du point M dans chaque référentiel
   - $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$

D. La dériver dans R_1, et en déduire la relation entre $\vec{v}_{M/R_1}$ et $\vec{v}_{M/R_2}$
   - $\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{O_2/R_1} + \vec{v}_{M/R_2}$

4.1. Loi composition vitesse (cas rotation uniforme)

A. Refaire un schéma des deux repères de référence R_1 et R_2

B. Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans R_1
   - $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$

C. L'exprimer aussi dans R_2
   - $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{e_x}' + y'\overrightarrow{e_y}' + z'\overrightarrow{e_z}'$

D. Egaler les deux expressions, et les dériver temporellement dans R_1, en faisant apparaître le vecteur rotation
   - $\vec{v}_{\frac{M}{R_1}} = \left(\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}\right) + x'\left(\frac{d\overrightarrow{e_x}'}{dt}\right)_{R_1} + y'\left(\frac{d\overrightarrow{e_y}'}{dt}\right)_{R_1} + z'\left(\frac{d\overrightarrow{e_z}'}{dt}\right)_{R_1}$
   - $\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + x'\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_x}' + y'\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_y}' + z'\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_z}'$

E. Identifier dans cette égalité la vitesse absolue et la vitesse relative
   - $\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

4.2. Loi composition accélération (cas rotation uniforme)

On repart de l'expression établie au 4[e] point du raisonnement précédent

$(\dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}) = \left(\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}\right) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

A. La dériver temporellement dans R_1
   - $(\ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}) = \left(\ddot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \ddot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \ddot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}\right) + \vec{\Omega} \wedge (\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}} + \dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}} + \dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}) + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R_1}$

B. Identifier l'accélération absolue et l'accélération relative
   - $\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$

C. Remarquer qu'un des termes restants s'identifie à $-\omega^2\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté de M sur l'axe de rotation
   - $\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} + \omega\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\omega\overrightarrow{e_z} \wedge \left(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}\right)\right)$
   - $\ldots + \omega^2\overrightarrow{e_z} \wedge \left(x\overrightarrow{e_y} - y\overrightarrow{e_x}\right)$
   - $\ldots - \omega^2(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y})$

D. Vérifier que l'autre terme s'écrit bien $2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{M/R_2}}$
   - $\boldsymbol{\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} - \omega^2\overrightarrow{HM}}$ avec H le projeté de M sur l'axe de rotation