CCP PSI 2010 : Clarinette-Saxo

A.1. $\boxed{dm(t) = \rho(x,t)\, S(x)\, dx}$

NB : comme toujours, lorsque l'on discrétise un pb continu dans l'espace, on assimile local^t le volume à un
- parallélépipède (en cartésien)
- cylindre (en cyl^{is}, comme ici)

$\boxed{dm(t+dt) = \rho(x, t+dt)\, S(x)\, dx}$

A.2. $\delta m_e = D_{me}\, dt$ par déf^o débit D_{me}

Or $D_{me} = \iint_x \rho(x,t)\, \vec{u}(x,t) \cdot \vec{dS}$

Or ρ et $\vec{u}$ supposés indpt autres coo.
donc $D_{me} = \rho(x,t)\, u(x,t)\, S(x)$.

$\boxed{\delta m_e = \rho(x,t)\, u(x,t)\, S(x)\, dt}$

De m, $\boxed{\delta m_s = \rho(x+dx,t)\, u(x+dx,t)\, S(x+dx)\, dt}$

A.3. Cons^o masse pr syst. ouvert :

$dm(t+dt) - dm(t) = \delta m_e - \delta m_s$

$$S(x)\,\cancel{dx}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,\cancel{dt}\right] \overset{\ominus}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u S\right]}_{\sim \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 u S)}\,\cancel{dx}\,\cancel{dt}$$

au 1er ordre

$$\boxed{S(x)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial (uS)}{\partial x} = 0}$$

A.4. A sauter, car n'est plus au pgm

pour culture : $(\vec{u}.\vec{grad})\vec{u} \sim \dfrac{U^2}{L}$

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} \sim \dfrac{U}{\tau}$

$$\frac{\|(\vec{u}.\vec{grad})\vec{u}\|}{\|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\|} \ll 1 \iff \boxed{\frac{U\tau}{L} \ll 1}$$

A.5. On a donc $\rho \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{grad}\, P$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}}_{\sim 0} = \underbrace{-\vec{grad}\, P_0}_{= \vec{0}} - \vec{grad}\, p$$

~ 0 car 2^e ordre. $= \vec{0}$ car uniforme

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{grad}\, p}$$

A.6. À $S = C^{te}$, on peut faire un dvpt limité de la f° $\rho(P)$ autour de P_0 :

$$\rho(P) = \underbrace{\rho(P_0)}_{\rho_0} + \underbrace{\left.\frac{\partial \rho}{\partial P}\right|_S (P_0)}_{\rho \chi_S} \times \underbrace{(P - P_0)}_{p}$$

d'où $\underbrace{\rho(P) - \rho_0}_{\mu} = \rho \chi_S p$

d'où $\mu = p \chi_S \rho = p \chi_S (\rho_0 + \mu)$

2^{e} ordre !

donc $\boxed{\mu = \rho_0 \chi_S p}$

A.7. On a

$$\begin{cases} S(x) \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial (uS)}{\partial x} = 0 & (1) \\ \rho_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} & (2) \\ \mu = \rho_0 \chi_S p & (3) \end{cases}$$

on veut l'éq° d'onde vérifiée par $p(x,t)$

on part donc de (1) et on ne garde que $p(x,t)$

- $$\underbrace{S(x) \frac{\partial}{\partial t}\left[p \chi_S \rho_0\right]}_{\text{car } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t} \ldots} + \rho_0 \left[\frac{\partial u}{\partial x} S + u \frac{dS}{dx}\right] = 0$$

- dans (2) on a $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, donc on le fait apparaître dans (1) :

$$S(x) \chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho_0 \left[S(x) \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}_{\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}\right)} \frac{dS}{dx}\right] = 0$$

- Il ne reste que chp $p(x,t)$, on réarrange les termes pour obtenir forme énoncée :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{S \chi_S \rho_0}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} S(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dS}{dx}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S \rho_0}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx}\right) \frac{\partial p}{\partial x}\right]} \qquad \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \rho_0}}}$$

2

→ m̂ idée mais on garde $u(x,t)$:

$\frac{\partial}{\partial t}(2)$ et $\frac{\partial}{\partial x}(1)$ → $\frac{\partial p}{\partial t}\frac{dS}{dx} + S\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \rho_0 \frac{\partial^2(uS)}{\partial x^2} = 0$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$$

à $\rho_0 \chi_s$ près

$$= \frac{1}{S}\left[\frac{dS}{dx}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\chi_s}\frac{\partial^2(uS)}{\partial x^2}\right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{S\chi_s}\frac{\partial(uS)}{\partial x} \quad \text{cf } \binom{(1)}{(3)} \, !$$

d'où $\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s S}\left[\frac{dS}{dx}\left(-\frac{1}{S}\frac{\partial(uS)}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2(uS)}{\partial x^2}\right]$

Or $\frac{\partial^2(uS)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[S\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{dS}{dx}\right]$

$$= \frac{dS}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} + S\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dS}{dx} + u\frac{d^2 S}{dx^2}$$

d'où $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}\left[\frac{1}{S}\left[-\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\left(u\frac{dS}{dx} + S\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\right.$

$$\left. + \frac{1}{S}\left[2\frac{dS}{dx}\frac{\partial u}{\partial x} + S\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{d^2 S}{dx^2}\right]\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} + \frac{2}{S}\frac{dS}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + u(x,t)\underbrace{\left(-\frac{1}{S^2}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \frac{1}{S}\frac{d^2 S}{dx^2}\right)}_{}\right]$$

$$\underbrace{-\frac{dS/dx}{S^2}\frac{dS}{dx} + \frac{1}{S}\frac{d^2 S}{dx^2}}_{}$$

$$= u'v + uv'$$

avec $u = \frac{1}{S}$ et $v = \frac{dS}{dx}$

d'où $= (uv)'$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right).$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{S}\frac{dS}{dx}\right)u\right]}$$

NB : Éq diff pour $u(x,t)$ à sauter le jour J... peu de candidats CCP PSI sont arrivés jusqu'au bout (j'imagine)

A.8. $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$

$$\boxed{\frac{PM}{RT_0} = \rho_0}$$

A.9. $PV^\gamma = C^{te} \Rightarrow \boxed{P\rho^{-\gamma} = C^{te'}}$

- Méthode diff^{el} log : $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\gamma P}$$

- NB : ici S est C^{te}, d'où

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\gamma P}$$

et diff^{el} calculée au voisinage de P_0

d'où $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\gamma P_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

A.10. $c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}}}$

AN : $c = \left(\frac{1{,}4 \times 8{,}31 \times 293}{29\,10^{-3}}\right)^{1/2}$

$$\boxed{c = 340 \text{ ms}^{-1}}$$

A.11. $S(x) = C^{te}$

(E_1) : $\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}$ idem pr (E_2)

éq^o de d'Alembert, $\underline{c \equiv \text{célérité}}$ et c'est aussi la vitesse de propagat^o des O Progressive.

A.12. $u(0,t) = 0 \ \forall t$

$p(L_{cla}, t) = 0 \ \forall t$

A.13. (E_1) : $-\omega^2 f(x)\cos(\omega t) = c^2 f''(x)\cos(\omega t)$

$\forall t \Rightarrow \boxed{f''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0}$

Idem pour $g(x)$.

A.14. Eq° diff. oscillateur harmonique, d'où $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$.

$\underline{u(0,t) = 0 \ \forall t \text{ ok}}$

A.15. $\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

d'où $-f'(x)\cos(\omega t) = \rho_0 \omega [u_1 \sin(kx)\cos(\omega t)]$

Or $\forall t \Rightarrow -f'(x) = \rho_0 \omega u_1 \sin(kx)$

d'où $f(x) = \rho_0 \frac{\omega}{k} u_1 \cos(kx) + C^{te}$

$C^{te} = 0$ car $f(x)$ est sinusoïdale d'après Eq diff A.13.

$$\boxed{p(x,t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx)}$$

$\rightarrow p(L_{cla}, t) = 0 \ \forall t \Leftrightarrow \cos(k L_{cla}) = 0$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tq $k_n L_{cla} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{k_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L_{cla}}}$ d'où $\boxed{\omega_n = \frac{\pi c}{L_{cla}}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$

A.16. $\boxed{f_1 = \frac{\pi c}{2 L_{cla}}}$ $\boxed{f_3 = 3 f_1}$ 1er harmonique.

A.17. 12 demi-tons $\equiv$ 1 octave $\Leftrightarrow a^{12} = 2$

$\Downarrow$

$\boxed{a = 2^{1/12}}$

A.18. Ré $\longleftrightarrow f_1$ Or $f_3 = 3 f_1$

? $\longleftrightarrow f_3$

A combien de demi-tons correspond un facteur 3 ? Nb N de demi-tons :

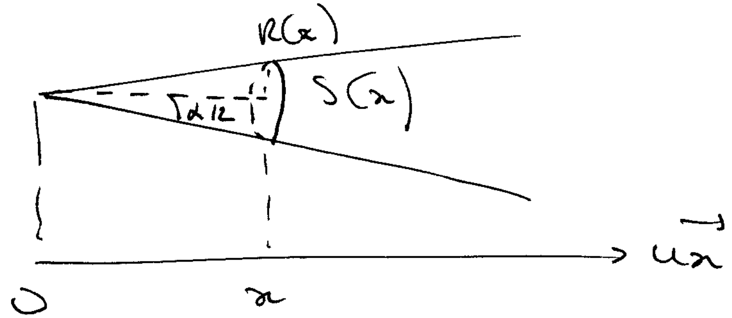
$a^N = 3 \Leftrightarrow 2^{N/12} = 3 \Leftrightarrow \frac{N}{12}\ln 2 = \ln 3$

$\Leftrightarrow N = 12 \frac{\ln 3}{\ln 2}$

AN : $N = 19{,}02 \rightarrow \boxed{N \sim 19}$

$N = 12 + 7 = \underbrace{\text{Ré}_{\text{octave supérieure}} + 7 \text{ demi-tons}}_{\text{La octave supérieure}}$

A.19.



$S(x)$ disque rayon $R(x) = x \times \tan \frac{\alpha}{2}$

d'où $\boxed{S(x) = \pi \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) x^2}$

A.20. $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln S)$

Or $\ln S = \ln\left(\pi^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right) + 2 \ln x$

d'où $\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = \frac{2}{x}$.

(E_1) : $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$

$= \frac{c^2}{x}\underbrace{\left[x\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\frac{\partial p}{\partial x}\right]}_{\text{facile de vérifier } = \frac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2}}$

On peut aussi reconnaître :
$(uv)'' = u'' + v'' + 2u'v'$

A.21. $\pi(x,t)$ vérifie d'Alembert

$\pi(0,t) = 0 \ \forall t$ car $x = 0$

$\pi(L_{sax}, t) = 0 \ \forall t$ car $p(L_{sax}) = 0$

A.22. $h''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(x) = 0$

$h(x)$ est cosinusoïdale tq $h(0) = 0$

d'où $\boxed{h(x) = \bar{C} \sin(kx)}$ $\left(k = \frac{\omega}{c}\right)$

$\longrightarrow \sin(k L_{sax}) = 0 \iff k_n L_{sax} = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L_{sax}} \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L_{sax}}}$

NB : décroissance de $p(x,t)$ en $\left(\frac{1}{x}\right)$ car puissance se conserve lors propagat° et se répartie sur surface $S(x)$ variant en x^2.

A.23. $\underbrace{\boxed{f_1 = \frac{c}{2L_{sax}}}}_{\text{fondal}}$ et $\underbrace{\boxed{f_2 = 2f_1}}_{\text{1er harmonique}}$

Sax : ttes les harmoniques

Clarinette : harmoniques impaires seult !