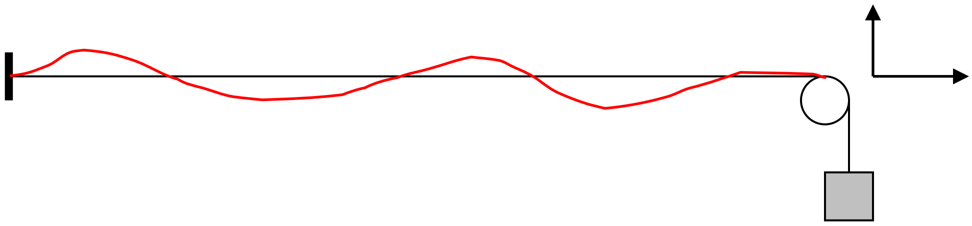
Chap.1 – Ondes unidimensionnelles en milieu non dispersif

Intro : Une onde se définit comme la propagation d'une perturbation au sein d'un milieu. Nous étudierons deux grandes catégories d'onde : les ondes *mécaniques* (au sein des milieux déformables) et les ondes *électromagnétiques* (dans le vide ou les milieux matériels). En PCSI et au lycée, la notion d'onde n'a été abordée que de manière qualitative. Il s'agit ici de *mathématiser* l'étude des ondes, en commençant par le cas le plus simple, celui d'une onde se propageant dans un milieu *non-dispersif*, *non-absorbant*, et *unidimensionnel*. L'équation aux dérivées partielles pilotant le phénomène s'appelle *l'équation d'onde*. Dans le cas d'un milieu non-dispersif, il s'agit de *l'équation de d'Alembert*.

1. Ondes transversales sur une corde vibrante

1.1. Modélisation simplifiée



Ondes transversales

L'onde de déformation de la corde est dite ***transversale*** *car les* ***vibrations*** *de chaque bout de corde se font* ***orthogonalement à la direction de propagation*** *de l'onde.*

On considère une corde homogène de masse linéique μ et tendue avec une tension T_0 à l'équilibre. On fait les approximations suivantes :

- corde *homogène* et *infiniment souple* (i.e. sans raideur : aucun effort pour la plier)
- on *néglige le poids* devant les forces de tension
- les mouvements sont *transversaux* : chaque brin élémentaire ne subit aucun déplacement horizontal
- les déplacements verticaux sont *petits* : on fera des DL en ne gardant que le terme d'ordre le plus bas

1.2. Equation d'onde de d'Alembert

On repère chaque point de la corde par le champ $y(x,t)$.
Dans ce paragraphe, le système est un brin élémentaire $d\ell$ de corde, situé entre x et $x+dx$.

Schéma (étape la plus importante) :
- Faire un schéma du brin de corde *au premier ordre* (i.e. brin assimilé à sa tangente à l'origine)
- Faire aussi un schéma du brin de corde au deuxième ordre, car on verra lors du calcul qu'il est nécessaire de tenir compte de sa courbure (mathématiquement représentée par le terme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$)
- Dessiner les angles $\alpha(x,t)$ et $\alpha(x+dx,t)$ du brin avec l'horizontal. Pourquoi sont-ils infiniment petits ?
- Dessiner les forces appliquées au brin $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$.

Calculs :
- Appliquer le PFD au brin, et le projeter.
- Effectuer des DL afin de simplifier les équations (idée math : faire apparaître dx).
- En déduire l'EDiff vérifiée par $y(x,t)$
- Dans l'EDiff, identifier un paramètre homogène à une vitesse

Equation de d'Alembert

Un champ $u(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle lorsque l'on peut écrire :

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

c *est homogène à une vitesse : c'est la* ***célérité*** *de l'onde.*

Nous verrons qu'elle représente *parfois* la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu.

Remarque :
- contrairement à l'équation de diffusion, cette équation d'onde est ***réversible*** en temps. Si l'on visualise le film à l'envers, on ne voit rien de surprenant.
- corollaire : en présence de dissipation d'énergie (frottements, etc.) la propagation d'une onde *ne peut pas être décrite par l'équation de d'Alembert*
- l'onde est ***transversale*** car la direction de vibration des éléments de corde se fait dans la direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde

2. Familles de solutions de l'équation de d'Alembert

L'équation de d'Alembert n'est pas vérifiée par toutes les ondes. Elle reste cependant intéressante car c'est la plus simple des équations permettant de décrire un phénomène de propagation réversible. Les familles de solution de cette équation peuvent aussi servir de bases pour résoudre des équations d'onde plus compliquées.

L'équation étant ***linéaire****, toute combinaison linéaire de solution est solution.*

2.1. Les ondes progressives

http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/transver.html
http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/ondes/transversales/onde.htm

Les ondes progressives $s(x,t)$ s'écrivent comme la composée de deux fonctions

Onde qui progresse dans le sens de x croissants : $s(x,t) = \boldsymbol{f(x - ct)}$ *ou* $\boldsymbol{f\left(t - \frac{x}{c}\right)}$

Onde qui progresse dans le sens des x décroissants : $s(x,t) = \boldsymbol{f(x + ct)}$ *ou* $\boldsymbol{f\left(t + \frac{x}{c}\right)}$

On peut donc toujours écrire une onde progressive comme la composée de deux fonctions :

$$s(x,t) = f \circ \phi$$

- la fonction $\phi(x,t)$ est une fonction de l'espace et du temps et s'appelle ***la phase de l'onde***
- la fonction f est une fonction d'une variable et donne l'amplitude de l'onde

C'est la valeur de la phase qui fixe l'amplitude de l'onde. La position x et l'instant t fixent la valeur de la phase.

La phase ϕ peut s'exprimer en mètre ou en seconde, c'est un choix arbitraire $\phi(x,t) = x - ct$ ou $t - \frac{x}{c}$
L'unité de l'amplitude f de l'onde dépend du phénomène étudié. Dans l'exemple de la corde, c'est un déplacement vertical : en mètre.

➢ Vérifier que les quatre écritures données dans l'encadré sont bien solutions de l'équation de d'Alembert.

Solution générale de l'équation de d'Alembert *(admis)*

$$\boldsymbol{f(x - ct) + g(x + ct)}$$

ou

$$\boldsymbol{f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

Illustration graphique *(à savoir refaire)*

L'onde progressive $s(x,t)$ se propage vers la droite. Son amplitude f est une « courbe à une bosse ». On choisit de définir la phase par $\phi(x,t) = x - ct$.

➢ Dessiner la fonction f en fonction de la variable ϕ. On note ϕ_{max} la valeur de la phase qui rend f maximale

➢ Dessiner une photo à un instant t_1 de l'onde $s(x,t_1)$. On note x_1 la position du max sur le dessin
➢ Exprimer la position x_1 du max en fonction de ϕ_{max} et t_1

Afin de superpose une photo de l'onde à un instant ultérieur ($t_2 > t_1$), on cherche la position x_2 la position du maximum de l'onde :
➢ Exprimer la position x_2 du max en fonction de ϕ_{max} et t_2, puis en fonction de x_1 et $(t_2 - t_1)$
➢ Vérifier que ce dernier calcul prouve mathématiquement que l'onde se propage dans le sens des x croissants, et superposer la 2e photo de l'onde à la 1ère

➢ Expliquer pourquoi on peut qualifier c de « ***vitesse de phase*** »

➢ Sans refaire tout le raisonnement, expliquer que $g(x + ct)$ est progressive dans le sens des x décroissants

Ondes progressives vers l'avant ou l'arrière

Une onde du type $\boldsymbol{f(x - ct)}$ *progresse vers l'avant* **selon les x croissants**
Une onde du type $\boldsymbol{g(x + ct)}$ *progresse vers l'arrière* **selon les x décroissants**

2.2. Les ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques)

Onde progressive harmonique

*Une **onde progressive** est **harmonique** si son amplitude est une fonction **sinusoïdale de la phase :***

$$\boldsymbol{f(\phi) = A\,cos(\omega\phi + \varphi)}$$

$Acos(\varphi)$ étant alors l'amplitude de l'onde à l'origine de la phase ($\phi = 0$, donc en $x = 0$ à $t = 0$)

Si l'on prend la convention $\phi(x,t) = t - \frac{x}{c}$, la phase est homogène à un temps et ω est une pulsation temporelle.

- Donner la période temporelle de l'onde, et sa fréquence, en fonction de la pulsation
- Montrer que l'OPH est aussi une fonction sinusoïdale de l'espace. Comment nomme-t-on la période spatiale d'une OPH (cf. PCSI) ?
- Donner sa pulsation spatiale, sa période spatiale, et sa fréquence spatiale

Si l'on prend la convention $\phi(x,t) = x - ct$, la phase est homogène à une position et on note plutôt $\boldsymbol{k}$ la pulsation spatiale associée.

- Donner la période spatiale de l'onde, et sa fréquence, en fonction de la pulsation spatiale
- Montrer que l'OPH est aussi une fonction sinusoïdale du temps
- Donner sa pulsation temporelle, sa période temporelle, et sa fréquence temporelle

Expression mathématique d'une OPH

$$\boldsymbol{s(x,t) = Acos(\omega t - kx + \varphi)}$$

*Une OPH est **doublement périodique** : dans l'espace et dans le temps.*
ω est sa pulsation temporelle, k sa pulsation spatiale.

Vocabulaire de la périodicité temporelle

La pulsation temporelle $\boldsymbol{\omega}$
La fréquence temporelle $\boldsymbol{f = \omega/2\pi}$
La période temporelle $\boldsymbol{T = 2\pi/\omega}$

Vocabulaire de la périodicité spatiale

*La pulsation spatiale $\boldsymbol{k}$ s'appelle aussi **la norme du vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{e}_x$*
*La fréquence spatiale $\boldsymbol{\sigma = k/2\pi}$ s'appelle **le nombre d'onde***
*La période spatiale $\boldsymbol{\lambda = 2\pi/k}$ s'appelle **la longueur d'onde***

Remarque : Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est surtout utile pour décrire la propagation des ondes en 2D ou 3D. L'information supplémentaire (par rapport à k seul) donnée par le vecteur est *la direction et le sens* de propagation de l'onde ($\vec{e}_x$ pour l'exemple unidimensionnel de la corde). En 3D, cela donne la direction et le sens de propagation de l'onde *en un point du front d'onde* uniquement (cf. prochains chapitres).

Intérêt de cette sous-famille de solutions (OPH)

*Toute onde progressive **peut-être décomposée en somme d'OPH** (discrète ou continue, analyse de Fourier).*
Attention, une OPH n'est pas « physique », seule une somme continue d'OPH l'est. Les OPH sont un outil.

2.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase

Relations entre périodicités temporelle et spatiale : définition de la vitesse de phase

Les grandeurs périodiques spatiale et temporelle sont reliées par la vitesse de phase :

$$\boldsymbol{v_\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{k}}$$

Cette vitesse est fixée par l'équation d'onde, et dépend donc du milieu de propagation.

Relation de dispersion

C'est la relation entre les pulsations spatiale $\boldsymbol{k}$ *et temporelle* $\boldsymbol{\omega}$ *:*
$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\omega})$ *ou* $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{k})$
*On la **détermine en réinjectant les OPH dans l'équation d'onde** (en utilisant la notation complexe).*
Tout comme l'équation d'onde, elle est déterminée par le milieu de propagation.

Milieu dispersif

*Un milieu est dit **dispersif si sa vitesse de phase dépend de la pulsation** (temporelle ou spatiale).*

Notation complexe pour une OPH :

- Par analogie avec le cours de 1ᵉA, introduire la notation complexe en régime sinusoïdal forcé (OPH cpx)
- En réinjectant dans l'équation de d'Alembert (valable en cpx car *linéaire*), retrouver la relation entre k et ω
- En déduire la vitesse de phase dans le cas de l'équation de d'Alembert
- Donner les relations entre les grandeurs spatiales/temporelles suivantes : période, fréquence.

Remarque : il existe deux conventions pour l'introduction de la notation complexe : $j(\omega t - kx)$ ou $j(kx - \omega t)$. Dans un problème sur les ondes, une fois une convention choisie, il suffit de ne pas en changer.

Vitesse de phase d'une onde vérifiant l'équation de d'Alembert

*Pour une OPH **vérifiant l'équation de d'Alembert** : la vitesse de phase égale la célérité* $v_\varphi = c$.
Si l'équation d'onde n'est pas celle de d'Alembert, ce résultat n'est plus valable.

2.4. Les ondes stationnaires

Ondes stationnaires

Pour résoudre l'équation de d'Alembert, on peut rechercher une solution aux variables séparées :
$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$$

- Justifier le qualificatif « stationnaire ».
- Réinjecter cette famille de solutions dans l'équation de d'Alembert, et séparer les grandeurs dépendant de x de celles dépendant de t. Que peut-on dire de chacun des termes (temporel et spatial) de l'équation obtenue ?

- Deux cas se présentent : déterminer la solution $s(x,t)$ dans les deux cas.
- Montrer que les solutions exponentielles ne vérifient pas les conditions aux limites dans le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités

Expression mathématique d'une OS harmonique

$$\boldsymbol{s(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$$

Les positions d'amplitude nulle s'appellent les ***nœuds*** *de l'OS.*
Les positions d'amplitude maximale s'appellent les ***ventres*** *de l'OS.*

- Dans le cas d'une corde fixée à ses deux bouts, dessiner une photo possible de la corde à un instant donné. En déduire une condition que doit vérifier la longueur d'onde d'une OS pour qu'elle puisse exister en régime permanent
- En déduire une condition sur la fréquence

2.5. Lien entre les deux familles de solutions : OPH et OS

- A partir d'une formule de trigo, montrer qu'une OPH peut être décomposée en une somme d'OSH
- Procéder de la même façon pour montrer qu'une OSH peut être décomposée en une somme d'OPH

Pour visualiser des ondes stationnaires sur une corde, et visualiser aussi les deux OPH dont la somme donne la même onde stationnaire : http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/son/melde/melde.htm

Une OPH peut toujours être décomposée en une somme d'OSH.
Une OS peut toujours être décomposée en une somme d'OPH.
On choisit la famille de solutions la mieux adaptée aux conditions aux limites.
Une « vraie » onde est nécessairement une somme continue d'OPH (ou d'OSH).

3. Applications des ondes stationnaires à la corde vibrante

On s'intéresse ici aux vibrations d'une corde en régime permanent. Soit la corde est en régime libre, excitée par pincement ou percussion (guitare, piano). Soit la corde est excitée sinusoïdalement par un vibreur.

3.1. *(Complément)* Réflexion d'une OP à une extrémité

Avant d'étudier les vibrations de la corde en régime permanent, intéressons-nous un instant à l'établissement du régime permanent (donc au régime transitoire). Un pincement provoque une déformation de la corde. En « pensant avec les OP », la déformation se propage des deux côtés (ondes progressives).

Idée à retenir

Une OP arrivant « au bout du milieu de propagation » ou « rencontrant un obstacle »
est en partie ***réfléchie*** *et en partie* ***transmise*** *(cas général).*

Essayons de démontrer cela dans un cas simple. Sois une OPH incidente arrivant à l'extrémité droite de la corde $x = 0$ (corde comprise entre $-\infty$ et 0). Ses paramètres sont fixés par la source émettrice : $y_i(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Cela signifie que cette expression a été déterminée sans tenir compte de la condition à la limite à l'autre bout de la corde, en $x = 0$ (comme si la corde n'était pas limitée en $x = 0$).

- Donner la condition à la limite $x = 0$ que doit vérifier la solution $y(x,t)$ de l'équation de d'Alembert. L'onde incidente vérifie-t-elle cette condition ?

Cela signifie que l'expression de l'onde incidente, déterminée en supposant la corde infinie à droite, n'est plus valable lorsqu'elle arrive proche d'une extrémité… logique. Il faut donc rechercher une solution plus complète : la solution générale de l'équation de d'Alembert :

$$y(x,t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Le deuxième terme s'interprète comme *l'onde réfléchie* sur l'extrémité $x = 0$ de la corde :

$$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$$

- En se plaçant en $x = 0$, à tout instant ultérieur au moment où l'onde incidente arrive en $x = 0$, montrer que la fonction amplitude G est l'opposée de la fonction F : $G = -F$
- En régime permanent, en déduire que l'onde réfléchie s'écrit à tout instant et en tout point

$$y_r(x,t) = -F\left(t + \frac{x}{C}\right)$$

- Une excitation sinus. est maintenue en $-\infty$, écrire mathématiquement l'amplitude F en fonction de la phase ϕ
- En déduire l'expression de l'onde totale en tout point de la corde. Interpréter physiquement.

<u>Autre idée intéressante</u>

*L'onde **réfléchie** sur un **obstacle immobile** est de **même fréquence** que l'onde incidente.*
*La fréquence est **différente** si l'obstacle est **mobile** (cf. effet **Doppler**)*

3.2. <u>Modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités</u>

On s'intéresse aux vibrations d'une corde en régime libre. L'équation d'onde est celle de d'Alembert, déterminée précédemment, d'après un modèle qui négligeait tout frottement, donc toute source d'atténuation de l'amplitude de l'onde. L'expérience montre qu'il vaut mieux introduire les solutions en OSH. La corde est fixée à ses deux extrémités, distantes de L.

- Donner la forme mathématique d'une OSH
- Appliquer les conditions aux limites, et déterminer les valeurs permises de ω et k
- Donner l'expression mathématique générale de l'onde totale en régime libre

*Les ondes stationnaires permises <u>en régime libre</u> s'appellent les **modes propres**.*
*Le mode $n = 1$ s'appelle le **mode fondamental**.*
*Le mode n s'appelle la $\mathbf{n^e}$ **harmonique***

- Dessiner les 4 premiers modes.

La solution générale est a priori une combinaison linéaire de tous les modes propres autorisés :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)$$

<u>Remarque</u> : Les coefficients A_n et φ_n de chaque terme de la série de Fourier sont déterminés par les conditions initiales, données en tout point de la corde : $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$

<u>Notions de musique</u> :

Une octave est l'intervalle de fréquence f, 2f.

Deux notes à l'octave sonnent de manière semblable, aussi portent-elles le même nom ; on les différencie par un numéro d'octave placé en indice. Une octave est divisée en 12 demi-tons formée des notes successives :

DO-DO⇔-RE-RE⇔ (appelé plutot MI∧)-MI-FA-FA⇔-SOL-SOL⇔-LA-LA⇔ (appelé plutôt SI∧)-SI-DO
⇔ = dièse : élève la note d'un demi-ton ;
∧ = bémol : abaisse la note d'un demi-ton.
Dans la gamme tempérée, deux demi-tons successifs ont un rapport de fréquence constant et égal à $2^{1/12}$.
La relation « nom-fréquence » nécessite une référence : le La_3 de fréquence f = 440 Hz.
Certains intervalles sonnent de manière plus harmonieuse que d'autres :

- l'octave ;
- la quinte correspondant à 7 demi-tons : exemple : do-sol $f_2 / f_1 = 2^{7/12} \approx 3/2$ (à 0,1 % près) ;
- la tierce majeure correspondant à 4 demi-tons : exemple : do-mi.

Un son musical n'est pas composé que d'une seule fréquence, mais comporte en général de nombreux harmoniques ; on le caractérise par 3 grandeurs :

- l'intensité, liée à l'amplitude des vibrations (reliée à la puissance sonore émise, puissance totale si plusieurs fréquences) ;
- la hauteur, liée à la fréquence fondamentale du son ;
- le timbre, lié au spectre du son.

3.3. Résonances sur la corde de Melde

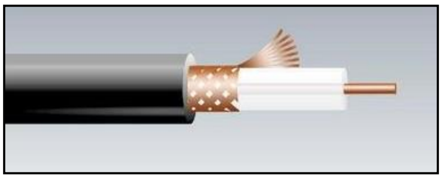
On dispose une lame vibrante à l'extrémité gauche de la corde, capable d'exciter transversalement la corde en $x = 0$: $y(x = 0, t) = y_0 cos(\omega t)$. La corde est fixée en $x = L$. On cherche une solution sous forme d'OS.

- Donner la forme mathématique d'une OS solution de l'équation de d'Alembert
- Montrer que la pulsation de l'onde est égale à celle de l'excitation.
- Déterminer les autres paramètres de l'onde. Interpréter physiquement le résultat.

Lorsque la fréquence d'excitation est égale à celle d'un mode propre, il y a résonance.

4. Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial

4.1. Equations de propagation du modèle bifilaire sans pertes



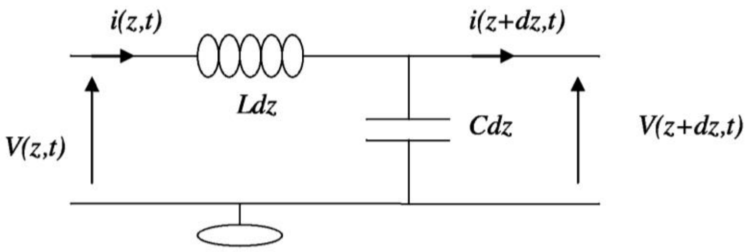


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

Les images ci-dessus représentent un câble coaxial, constitué (depuis l'extérieur vers l'intérieur) :

- d'une gaine extérieure isolante
- dune gaine conductrice tressée : *la borne (-)*
- d'un isolant
- d'une âme centrale conductrice : *la borne (+)*

NB : Chaque extrémité du câble est munie de connecteurs BNC, permettant de brancher ce câble à d'autres câbles ou d'autres appareils.

Le câble est modélisé par une ***répartition continue*** et ***homogène*** de ses propriétés électriques. Le schéma de droite représente une tranche élémentaire de câble :

- le fil du bas représente la gaine conductrice extérieure (borne –)
- le fil du haut représente l'âme centrale conductrice (borne +)
- les deux portions élémentaires de ces conducteurs forment un condensateur cylindrique
- l'existence du phénomène d'induction propre nécessite d'introduire l'inductance propre de la tranche
- pas de résistance car le modèle néglige les pertes énergétiques (modèle avec pertes sera vu plus tard)

- L'ARQS est-elle valide pour étudier les phénomènes électriques dans le câble (100 m, $f_{max} = 1\ MHz$) ?
- Justifier alors le choix d'étudier d'abord une tranche de câble
- Justifier l'introduction d'une capacité linéique (i.e. capacité de la tranche est proportionnelle à sa longueur)

L'étude de phénomène d'induction à l'aide de la circulation du champ électromoteur permettrait de justifier simplement la proportionnalité de l'inductance avec la longueur de la tranche, donc l'introduction d'une inductance linéique.

- Etablir les deux équations aux dérivées partielles, couplées, vérifiées par $u(z, t)$ et $i(z, t)$
- En les découplant, en déduire l'équation d'onde vérifiée par chacun des deux champs
- Discuter physiquement du résultat : nom de l'équation ? expression de la célérité ? homogénéité ?
- Démontrer à nouveau la relation de dispersion (déjà connue pour cette équation d'onde, mais pour s'entraîner)
- En déduire la vitesse de phase. Le câble modélisé ainsi est-il un milieu dispersif ?

4.2. Impédance caractéristique du câble

Les deux équations de couplage établies précédemment sont caractéristiques des phénomènes ondulatoires. Dans le cas de la corde vibrante aussi ces équations couplées existent (nous n'avons pas insisté sur ce point car ce n'est pas au programme).

Un phénomène ondulatoire est donc caractérisé par la propagation d'au moins deux grandeurs couplées. Si l'on considère des solutions ***en onde progressive***, on va montrer que les deux grandeurs sont reliées l'une à l'autre par un paramètre caractéristique du milieu de propagation : c'est ***l'impédance du milieu***.

Il y a deux méthodes pour établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un milieu :

- on se donne une solution en onde progressive, et on réinjecte dans une des équations de couplage
- on se donne une solution en OPH, et on réinjecte dans une des équations de couplage, en notation cpx

- ➢ Via la deuxième méthode (facile), établir l'expression de l'impédance caractéristique du câble
- ➢ Le faire via la première méthode (plus difficile)
- ➢ Montrer que l'impédance change de signe selon qu'on se donne une onde progressant vers la droite ou vers la gauche (cela fait un peu penser aux conventions récepteur / générateur de l'électrocinétique)
- ➢ Vérifier l'homogénéité de l'expression de l'impédance

Si aux concours on vous laisse le choix, utiliser les OPH et la notation complexe (… comme en élec !)

Impédance caractéristique du milieu de propagation

Un phénomène ondulatoire résulte de la ***propagation couplée de deux grandeurs physiques****.*
Dans le cas d'OP ou d'OPH, les deux grandeurs sont reliées *par* ***l'impédance du milieu****.*
L'impédance change de signe *selon que l'OP progresse vers la droite ou vers la gauche.*
ATTENTION *: si l'onde* ***n'est pas une OP****, alors la notion d'****impédance ne peut pas être utilisée****.*

NB : Dans le cas de la corde, les deux grandeurs couplées sont : la projection verticale de la force exercée par le brin suivant sur le brin étudié ; et la projection verticale de la vitesse du brin étudié.

4.3. Observation de la réflexion en amplitude sur une impédance terminale

Manipulation : On branche un GBF à un câble coaxial d'une centaine de mètre de long. Le GBF génère un signal créneau dont on peut faire varier le rapport cyclique, défini par le rapport entre la durée de l'alternance positive et la période. On règle le rapport cyclique à la valeur minimale, et l'on fixe la fréquence du créneau à une valeur proche de $1\,MHz$. On branche au bout du câble une résistance R réglable $[0 - 1\,M\Omega]$. On visualise à l'oscilloscope la tension à l'entrée du câble.

- ➢ Qu'observe-t-on quand $R \to +\infty$? et quand $R = 0$?
- ➢ En supposant que la vitesse de propagation du signal est égal à la célérité, mesurer cette dernière
- ➢ Pour quelle valeur de R n'observe-t-on plus qu'un seul pic ?
- ➢ En supposant que cette valeur est celle de l'impédance caractéristique du câble (on le démontrera après), en déduire l'inductance linéique et la capacité linéique du câble

Interprétation : Pour comprendre ces observations, nous allons exprimer le coefficient de réflexion en bout de câble en fonction de R et Z_C (l'impédance caractéristique du câble). Ce coefficient est défini pour des OPH, par le rapport des amplitudes complexes de l'onde réfléchie et de l'onde incidente. On suppose pour les calculs que le GBF se trouve en $z \to -\infty$, et la résistance R en bout du câble se trouve en $z = 0$.

- ➢ Donner l'écriture mathématique de l'OPH incidente $u_i(z,t)$ de pulsation ω_i, puis l'écrire en complexe
- ➢ Faire de même pour l'OPH réfléchie $u_r(z,t)$, a priori de pulsation ω_r différente
- ➢ Donner l'expression complexe de l'onde totale $u(z,t)$ en un point z de la ligne
- ➢ Faire de même pour l'onde totale $i(z,t)$ en utilisant Z_C (pour exprimer le courant à partir de la tension, on pourrait aussi revenir à une des équations de couplage, sans utiliser la notion d'impédance)

Cas $R = 0$:

- Exprimer la condition à la limite $z = 0$
- En déduire que :
  - $\omega_r = \omega_i$
  - le coefficient de réflexion en bout de ligne $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{u_r}(0,t)}{\underline{u_i}(0,t)}$ vaut -1
  - l'onde $u(z,t)$ est une onde stationnaire
- Montrer que l'onde en courant $i(z,t)$ est aussi stationnaire, en quadrature de phase avec l'onde en tension
- Montrer que la puissance moyenne reçue à l'entrée de la tranche $[z, z + dz]$ est nulle $\forall z$

Cas $R \to +\infty$:

- Exprimer la condition à la limite $z = 0$
- En déduire que :
  - $\omega_r = \omega_i$
  - le coefficient de réflexion en bout de ligne $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{u_r}(0,t)}{\underline{u_i}(0,t)}$ vaut $+1$

On pourrait montrer de même que les ondes en tension et en courant sont encore stationnaires, et en quadrature de phase l'une avec l'autre. La puissance reçue en entrée d'une tranche est toujours nulle, $\forall z$

Cas R quelconque :

- Exprimer la condition à la limite $z = 0$
- En déduire que :
  - $\omega_r = \omega_i$
  - le coefficient de réflexion en bout de ligne $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{u_r}(0,t)}{\underline{u_i}(0,t)}$ vaut $\frac{R - Z_C}{R + Z_C}$
- En déduire qu'il y a adaptation d'impédance pour $R = Z_C$: il n'y a pas d'onde réfléchie. Ainsi toute la puissance électrique émise par le GBF est transmise à la résistance R

PHYSIQUE DES ONDES

Présentation

Le programme de physique des ondes s'inscrit dans le prolongement de la partie « signaux physiques » du programme de PCSI, où des propriétés unificatrices (diffraction, interférences, battements…) ont été abordées en s'appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d'onde. Il s'agit désormais de mettre en place l'équation d'onde de d'Alembert, à une ou trois dimensions, sur des systèmes mécaniques ou électromagnétiques. On aborde ensuite l'étude de la dispersion et de l'absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Enfin, la propagation d'ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d'ondes à une interface.

Objectifs de formation

- Décrire l'évolution d'un système mécanique déformable en appliquant le principe fondamental de la dynamique de manière locale, en utilisant des champs comme en électromagnétisme.
- Utiliser les équations de Maxwell en dehors de l'ARQS.
- Manipuler des équations couplant des champs scalaires et vectoriels afin d'établir une équation de propagation.
- Résoudre une équation de propagation en exploitant des familles de solutions particulières.
- Exploiter la linéarité, utiliser la décomposition harmonique, réinvestir les connaissances sur l'analyse spectrale.
- Dégager des analogies entre des systèmes mécaniques et électromagnétiques.

Le bloc 1 est consacré à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs. L'équation de d'Alembert unidimensionnelle est d'abord établie en étudiant une partie infinitésimale de corde ou de câble coaxial. On se contente de vérifier que les superpositions de fonctions du type $f(x-ct)$ et $g(x+ct)$ sont solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension.
Dans un deuxième temps, on étudie les ondes sonores puis les ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace physique de dimension trois.
L'équation de propagation des ondes sonores est établie dans le cadre de l'approximation acoustique avec une approche locale. Le principe fondamental de la dynamique est appliqué en justifiant que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\vec{a} = \partial\vec{v}/\partial t$ lorsque l'amplitude des oscillations est faible devant la longueur d'onde. L'occasion se présente ainsi d'utiliser les opérateurs de dérivation dans un autre domaine que celui de l'électromagnétisme.
Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution de l'équation de d'Alembert, pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
1.1. Propagation unidimensionnelle	
Ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.	Établir l'équation d'onde en utilisant des systèmes infinitésimaux. Définir une onde longitudinale et une onde transversale.
Équation de d'Alembert.	Identifier une équation de d'Alembert. Exprimer la célérité en fonction des paramètres du milieu.

Exemples de solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. Ondes progressives harmoniques. Ondes stationnaires harmoniques.	Définir une onde progressive et une onde stationnaire. Établir la relation de dispersion à partir de l'équation de d'Alembert. Utiliser la notation complexe. Définir le vecteur d'onde, la vitesse de phase. Retrouver la distance égale à $\lambda/2$ entre deux nœuds consécutifs ou entre deux ventres consécutifs. Décomposer une onde stationnaire en ondes progressives, une onde progressive en ondes stationnaires.
Conditions aux limites. Régime libre : modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Régime forcé : résonances de la corde de Melde.	Justifier et exploiter des conditions aux limites. Définir et décrire les modes propres. Construire une solution quelconque par superposition de modes propres. Associer mode propre et résonance en régime forcé.
Ondes de tension et de courant dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique. Impédance caractéristique. Réflexion en amplitude sur une impédance terminale.	Décrire le modèle. Établir les équations de propagation. Établir l'expression de l'impédance caractéristique d'un câble coaxial. **Étudier la réflexion en amplitude de tension pour une impédance terminale nulle, infinie ou résistive.**

Animations + manip :

- *Onde progressive et sa réflexion sur une grande corde attachée à un bout et excitée à la main*
- *Corde de Melde (résonance) : vérification expérimentale de l'expression de la célérité*
- *Réflexion au bout d'un câble de 100m de long, selon différentes valeurs de impédance terminale*