DS 1 -- Révisions mécanique PCSI - Référentiels non galiléens Statique des fluides *(16/09/2022 – 3h)*

Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés, il sera retiré 1 point /20 à la note finale.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

Aucune sortie définitive n'est autorisée avant 16h

***Résolution de Pb 1* : Equilibre d'un ballon sonde** *(< 30 min)*

On considère un ballon sonde rempli d'hélium, auquel est accroché une nacelle de 1,8 $tonnes$. Les parois du ballon sont rigides. Son volume est de $2200\ m^3$. Il existe une valve à la base du ballon, qui permet à l'hélium de sortir lorsque la pression interne au ballon devient supérieure à la pression atmosphérique.
L'hélium a été introduit dans le ballon au niveau de la mer, où la pression ambiante est de $1 bar$.

Données :
- masse molaires $M_{N_2} = 28\ g.mol^{-1}$, $M_{O_2} = 32\ g.mol^{-1}$, $M_{He} = 4\ g.mol^{-1}$
- $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$, $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

Déterminer l'altitude d'équilibre du ballon (expression littérale puis application numérique).

<u>Problème 2</u> : *Mécanique en référentiel non-galiléen* (CCP TSI 2007)

Au cours de ce problème, nous envisagerons deux situations différentes d'un petit anneau M de masse m, considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer <u>sans frottements</u> le long d'une tige OA, de longueur l, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical (Δ) passant par son extrémité O.

Le référentiel lié au laboratoire sera considéré comme galiléen.

L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au laboratoire et tel que :

$\vec{e}_x$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Ox.

$\vec{e}_y$: vecteur unitaire de l'axe horizontal Oy.

$\vec{e}_z$: vecteur unitaire de l'axe vertical Oz.

On pourra lors des calculs vectoriels utiliser les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_T$ définis de la manière suivante :

$\vec{e}_r$: vecteur unitaire du plan (Oxy) dirigé suivant la projection de la tige dans le plan (Oxy) et orienté dans le sens $\overrightarrow{OA}$ de la tige.

$\vec{e}_\theta$: vecteur unitaire du plan (Oxy), perpendiculaire au vecteur $\vec{e}_r$ et tel que le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ soit un repère direct.

$\vec{e}_T$: vecteur unitaire de la tige et orienté de O vers A.

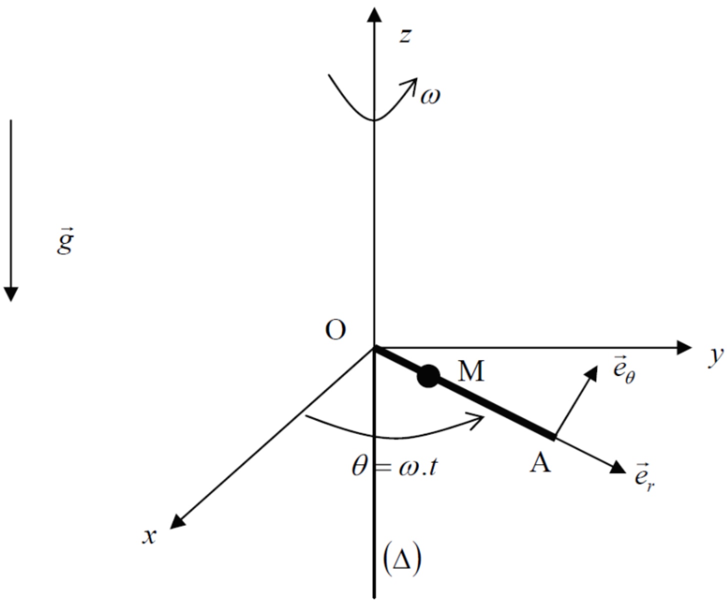
Première partie : la tige OA est dans le plan horizontal

La tige OA se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Δ) à la vitesse angulaire constante ω. L'axe (Δ) est ainsi confondu avec l'axe Oz.

Dans ce cas on a donc : $\vec{e}_r = \vec{e}_T$.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).

On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

1/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.
Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r et des vecteurs unitaires définis précédemment.
Quels sont les vecteurs unitaires qui portent les composantes de la réaction de la tige ?

2/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

3/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

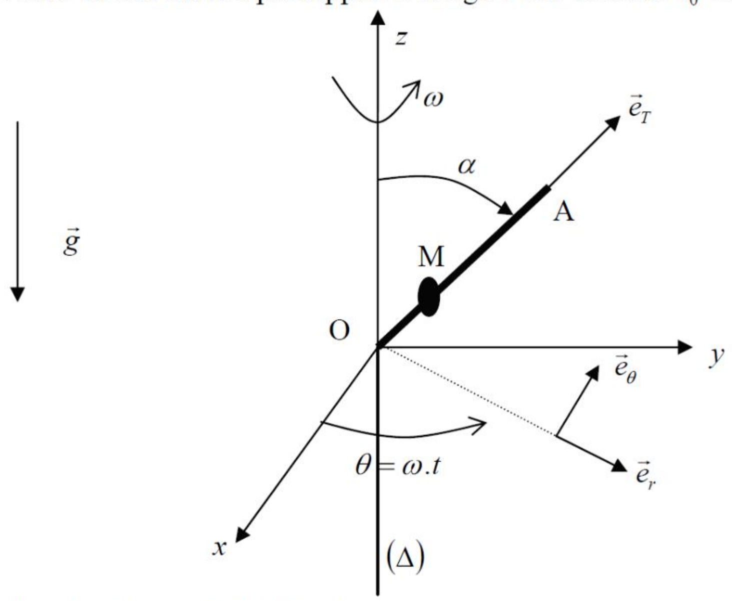
4/ En déduire l'expression du temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, l et ω.

5/ Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}_f$, calculée dans le référentiel lié à la tige, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}'_f$, calculée dans le référentiel lié au laboratoire, de l'anneau lorsqu'il quitte la tige en fonction de ω, r_0, l et d'un ou plusieurs des vecteurs unitaires définis précédemment.

Deuxième partie : la tige fait un angle α quelconque avec l'axe (Δ)

La tige OA fait maintenant un angle α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$ rad) avec l'axe (Δ). La tige tourne autour de (Δ) avec la vitesse angulaire constante ω.
On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance r entre le point O et l'anneau M ($r = OM$).
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige à une distance r_0 du point O ($r_0 < l$).



L'étude est menée dans le référentiel lié à la tige.

6/ L'anneau est soumis à son poids, aux forces d'inertie et à la réaction de la tige.
Faire un schéma sur lequel apparaissent ces forces.
Ecrire l'expression vectorielle du poids et des forces d'inertie en fonction de m, g, ω, r, α et des vecteurs unitaires définis précédemment.

7/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

8/ Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, α, g, ω et t.

9/ Déterminer la position d'équilibre $r_{éq}$ de l'anneau sur la tige. Exprimer $r_{éq}$ en fonction de ω, α et g.
Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre de l'anneau sur la tige OA que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur seuil ω_0 que l'on déterminera. Exprimer ω_0 en fonction de α, g et l.

<u>Problème 3</u> : Suspension d'un véhicule en régime forcé *(CCP TSI 2013)*

fonctions complexes :

pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

On notera $\underline{x}(t) = X_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$,

où $x(t) = Re(\underline{x})$ et $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$ ($\underline{X_m}$ représente l'amplitude complexe de $\boldsymbol{x}$).

On a donc $X_m = |\underline{X_m}|$ et $\varphi = \arg(\underline{X_m})$.

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1.
Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.
Ici encore la position verticale du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4).
Dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal.
On a donc $z_s(t) = z_{s0} \cos(\omega t)$.

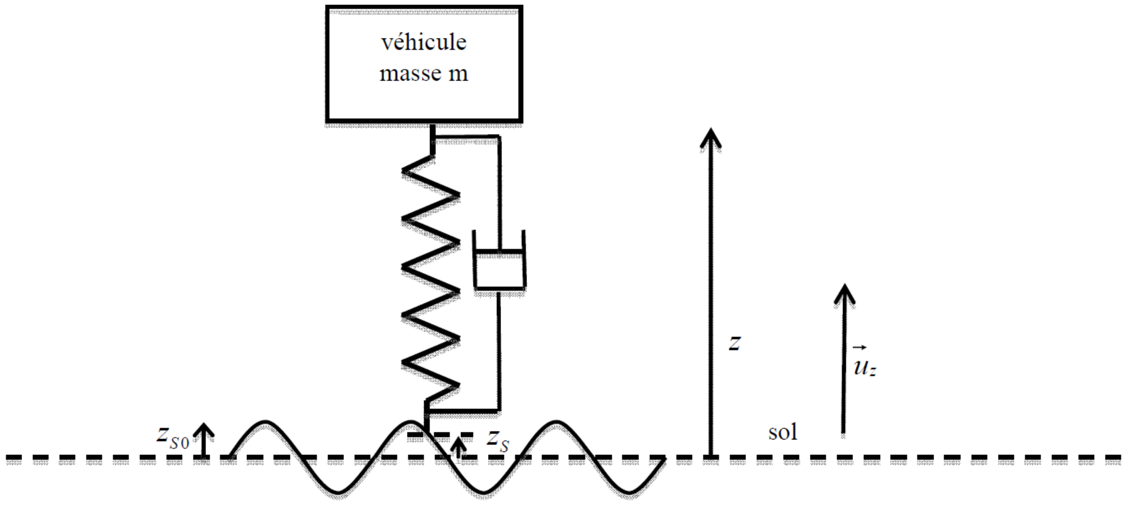


Figure 4 : régime forcé

La suspension comporte un dispositif d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide.
On a donc $\vec{F} = -h(\dot{z} - \dot{z}_s)\vec{u}_z$.

13 – Déterminer l'expression de la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction de k, z, z_s, l_0 et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$.
14 – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'équation différentielle reliant les fonctions $z(t)$ et $z_s(t)$ et leurs dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question **2**).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e, on posera $z' = z - z_e$.

15 – Montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme : $m\ddot{z}' + h\dot{z}' + kz' = Y(t)$.
Déterminer l'expression de $Y(t)$ en fonction de z_s, $\dot{z}_s$, k et h.

16 – Pour simplifier les notations, on posera :

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m} \text{ et } 2\lambda = \frac{h}{m}.$$

Déterminer l'expression de la réponse complexe $\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}$ de la suspension en fonction de ω, ω_0 et λ.

Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \left|\frac{\underline{Z_m}'}{\underline{Z_{sm}}}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}.$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

17 – Etude de la réponse complexe.

17.1 – Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
17.2 – Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.
17.3 – On considère pour simplifier :

- que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
- que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 2\lambda^2$.

Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ. A quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

18 – Donner l'allure de la courbe représentant $H = \left|\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right|$ en fonction de ω. On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

Problème 4 ***: Station spatiale internationale*** *(extrait petites Mines 2005)*

Une station spatiale est sur une orbite circulaire autour de la Terre. Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique *K*, d'origine O considéré comme galiléen. La station spatiale est repérée en son centre par un point *S* de masse M_S, repéré par le rayon vecteur $\vec{R} = \overrightarrow{OS}$. On rappelle que le mouvement de la station spatiale s'effectue dans un plan contenant le centre O de la Terre. Ce plan est perpendiculaire au vecteur rotation $\vec{\omega}$ de l'orbite circulaire de la station autour de la Terre.

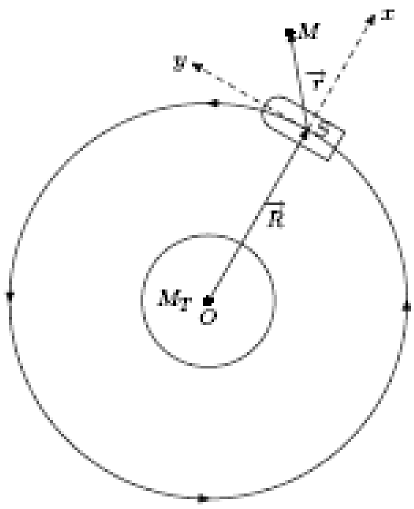
1. Enoncer le principe d'inertie en rappelant la définition d'un référentiel galiléen.
Définir le référentiel géocentrique. En considérant le référentiel de Copernic galiléen, sur quelle échelle de temps le référentiel géocentrique peut-il être considéré comme approximativement galiléen ?

2. A partir de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression littérale de la vitesse *V* de la station spatiale en fonction de la masse de la Terre, M_T, de la constante de gravitation universelle *G* et du rayon *R*. En déduire l'expression de ω.

3. La station spatiale internationale en construction depuis 1998 est située à une altitude de 400 km. Calculer littéralement puis numériquement sa période de rotation *T*.

Données : Rayon terrestre R_T = 6400 km
Accélération de la pesanteur à la surface du globe g_0 = 9.8 m.s^{-2}

La station spatiale est en rotation synchrone autour de la Terre ; elle tourne sur elle-même avec un vecteur vitesse angulaire identique à celui de son mouvement orbital, $\vec{\omega}$. On désigne par *K'* le référentiel lié à la station.
On définit un repère d'origine située au point *S*. L'axe *Sx* est dirigé suivant $\vec{R}$, l'axe *Sz* est porté par le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe *Sy* complète le trièdre orthonormé direct. Dans ce référentiel, un corps ponctuel *M*, de masse *m*, est en mouvement dans le plan *Sxy*. Il est repéré dans la station par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{SM}$. On néglige l'attraction gravitationnelle due à la station sur le point M.



4. En considérant un repère centré en O dont les axes ont même direction que le repère (S, x, y, z), expliquer pourquoi l'on peut dire que le référentiel *K'* est en rotation uniforme (de vecteur $\vec{\omega}$) par rapport à un axe fixe dans *K*. Justifier alors que le référentiel *K'* n'est pas galiléen.

5. Définir le point coïncident à *M* et établir son accélération $\overrightarrow{a_e(M)}$ en fonction de $\vec{r}$, $\vec{R}$ et ω.

En déduire que la force d'inertie d'entraînement $\vec{f_e}$ exercée sur la masse *m* dans *K'* s'écrit :

$$\vec{f_e} = m\omega^2\left(\vec{R} + \vec{r}\right)$$

6. Si la particule *M* est animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans *K'*, quelle force d'inertie supplémentaire lui est appliquée ? Exprimer cette force.

<u>On admet le résultat suivant</u> : Un développement limité au premier ordre en *r/R* permet de montrer que la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur le corps M s'écrit : $\vec{F} = -m\omega^2\left(\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{u_x}\right)$, où $\vec{u_x}$ est le vecteur unitaire de *Sx* et (x, y) sont les coordonnées de M dans le repère (S, x, y, z).

7. Le corps *M* est une balle qu'un cosmonaute lance en direction de la Terre avec la vitesse relative $\vec{v_0} = -v_0\vec{u_x}$ ($v_0 << R\omega$) dans *K'* depuis l'origine *S* de ce référentiel. Etablir l'équation du mouvement dans *K'* de la balle sous la forme de deux équations différentielles pour les variables *x* et *y*.

8. Intégrer ces équations, et montrer que la trajectoire suivie est une ellipse, d'équation cartésienne :

$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

Où (x_c, y_c) sont les coordonnées du centre de l'ellipse, a le demi grand axe et b le demi petit axe.
Déterminer sa période de parcours.

<u>Fin de l'énoncé</u>