

# Exercices – Ecoulement parfait : Bernoulli

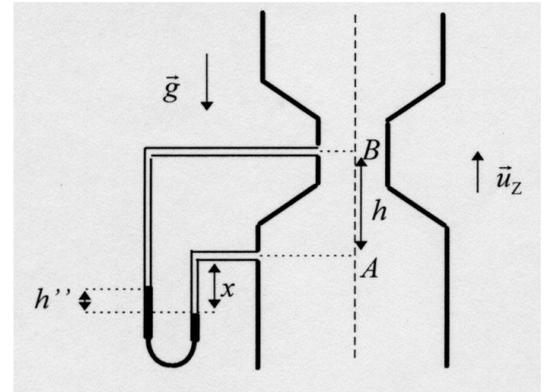
## Exercice 1 : Jauge de Venturi verticale

Traiter un exemple du cours dans une situation légèrement différente  
Relier la dénivellation du mercure aux pressions dans la jauge

Une jauge de Venturi est constituée d'un conduit de section circulaire, de surface  $S_A$  (diamètre  $d_A$ ) qui présente un rétrécissement de section  $S_B$  (diamètre  $d_B$ ). De l'eau s'écoule dans la jauge.

On mesure à l'aide d'un tube en U contenant du mercure la différence de pression entre A et B. La dénivellation du mercure est  $h''$ .

En-dehors de la canalisation principale (donc dans le tube en U et les tubes horizontaux), les fluides (eau et mercure) sont statiques.



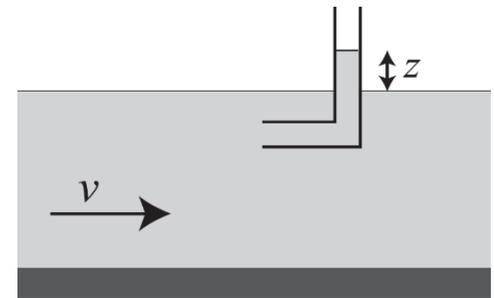
Déterminer la vitesse de l'eau en A et le débit à travers la jauge. On assimilera l'eau & un fluide parfait et incompressible en écoulement stationnaire.

Données :  $h'' = 35,0 \text{ cm}$  ;  $d_A = 30,0 \text{ cm}$  ;  $d_B = 15,0 \text{ cm}$  ;  $\mu(\text{Hg}) = 13\,600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ;  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

## Exercice 2 : Débitmètre

Une façon simple de mesurer le débit d'un écoulement à l'air libre  
Repérer seul la présence d'un point d'arrêt dans l'écoulement

Dans une rivière, le champ de vitesse est horizontal, supposé uniforme près de la surface  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , et l'eau est assimilée à un fluide parfait. On y plonge un tube coudé de section uniforme  $S$ , qui descend à la profondeur  $d$  et qui dépasse la surface libre de la rivière d'une hauteur  $H$ . L'axe  $z$  ascendant a pour origine la surface libre de la rivière.



1. Faire un schéma. Dans un premier temps, on suppose que l'eau monte dans le tube jusqu'à la hauteur  $z < H$  au-dessus de la surface de la rivière. Etablir la relation entre  $v$  et  $z$ .

2. A partir de quelle vitesse critique  $v_c$  d'écoulement de la rivière un jet d'eau peut-il se former au-dessus du tube ? Jusqu'à quelle hauteur  $h'$  (au-dessus de la rivière) ce jet monte-t-il ?

3. En supposant que le jet d'eau est vertical à sa base, et que les lignes de courant sont toutes parallèles, quelle est la vitesse de l'eau à la sortie du tube ? Quelle est alors la vitesse de l'eau dans le tube ?

## Exercice 3 : Vase de Mariotte

Une clepsydre simple d'utilisation pour tester si l'on a compris Torricelli

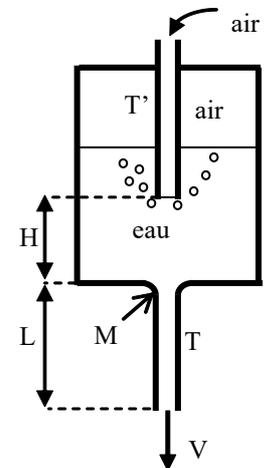
On considère le dispositif de la figure ci-contre, contenant de l'eau.

Le tube  $T$ , de longueur  $L$  laisse s'écouler l'eau ; le tube  $T'$ , qui a son orifice inférieur à une hauteur  $H$  au-dessus de  $T$ , laisse passer l'air depuis l'atmosphère de pression  $p_0$ .

1. Exprimer la vitesse de sortie  $V$  de l'eau lorsque le niveau d'eau est au-dessus de l'orifice inférieur de  $T'$ , en fonction de  $g$ ,  $L$  et  $H$ . Dépend-elle de la hauteur d'eau ?

2. Expliquer en quoi le tube  $T'$  permet-il au dispositif d'être une clepsydre simple d'utilisation (pour la mesure du temps)

3. Que se passe-t-il si la hauteur d'eau située au-dessus de la sortie du tube  $T'$  est supérieure à  $10 \text{ m}$  ?



#### Exercice 4 : Vidange d'un réservoir fermé

Effet d'un bouchon sur la vidange d'un réservoir

Gérer une condition à la limite plus compliquée qu'à l'air libre

Faire preuve d'initiative en faisant une hypothèse sur une transformation

Une bonbonne remplie d'eau se vide par un trou pratiqué sur le côté au bas du récipient. A l'instant  $t$ , la bonbonne est à moitié pleine, la hauteur d'eau étant  $H = 10 \text{ cm}$  et le volume d'eau  $V = 2 \text{ L}$  ; on ferme alors la partie supérieure avec un bouchon.

1. Expliquer pourquoi toute l'eau ne va pas s'écouler
2. Quel volume d'eau s'écoule finalement ?

Réponse (non vérifiée) :  $v = 20 \text{ cm}^3$ .

#### Exercice 5 : Micro-centrale hydraulique (MPonts PSI 2006)

Etudier un dispositif industriel

Etudier le phénomène de cavitation

S'entraîner sur un sujet de concours

La centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant  $D$ , dite *conduite forcée*, issue du barrage (Fig. 1). La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée A, est reliée à une tubulure de section décroissante, appelée *injecteur*.

L'axe vertical repérant l'altitude  $z$  est orienté vers le haut. L'altitude du point A est, par convention, nulle ; on note  $H$  la dénivellation entre la surface libre de l'eau et l'axe de l'injecteur et  $h$  la différence de niveau entre l'entrée de la conduite et la sortie, en A (la différence de niveau entre la surface libre et l'entrée de la conduite est donc  $h' = H - h$ ). L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible et de masse volumique  $\mu$  ; elle sort de l'injecteur à l'air libre, sous la pression atmosphérique  $P_0$ , supposée indépendante de l'altitude.

Le jet est cylindrique d'axe horizontal et de section circulaire de diamètre  $D$  dans la conduite puis  $d$  dans l'injecteur. Ce jet frappe la turbine et l'anime d'un mouvement de rotation. On considère les écoulements comme permanents et irrotationnels. On néglige tout frottement. On néglige les variations avec l'altitude de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

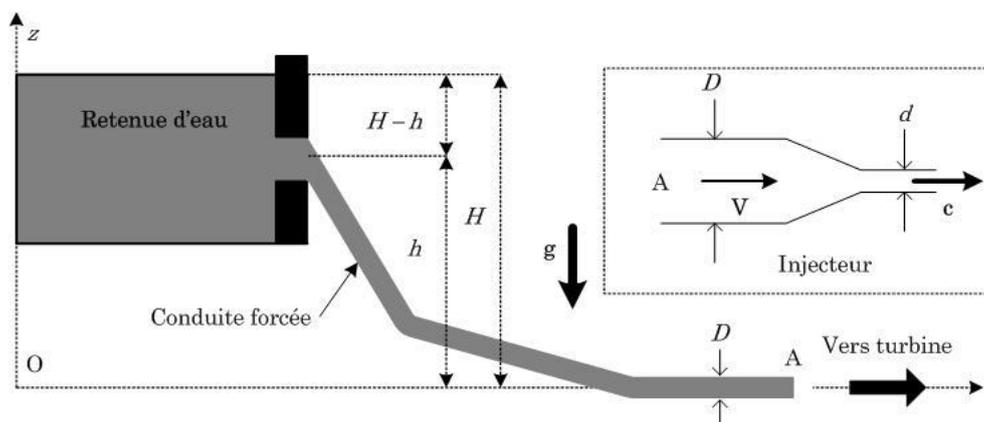
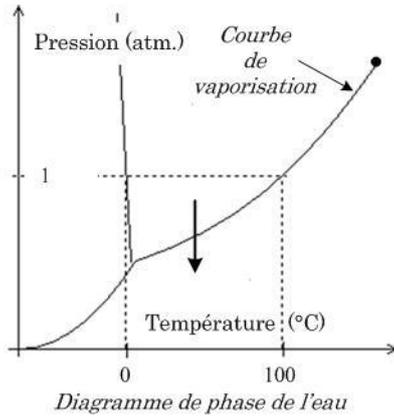


Fig. 1 - Retenue et conduite forcée pour installation hydroélectrique.  
L'injecteur, en A, est schématisé dans le rectangle en pointillés.

Données :  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ,  $D = 60 \text{ cm}$ ,  $H = 300 \text{ m}$  et  $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

# I – Conduite forcée

□ 1 – Dans cette question — et dans cette question seulement — on suppose que l'extrémité aval de la conduite n'est pas reliée à l'injecteur ; l'eau sort à l'air libre au point A. En justifiant l'utilisation de la relation de Bernoulli entre le point A et un point quelconque de la canalisation et en considérant la conservation du débit, exprimer la pression  $P_1(z)$  à l'intérieur de la conduite sous la forme



$$P_1(z) = P_0 \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right), \text{ avec } z_0 = \frac{P_0}{\mu g}.$$

Calculer  $z_0$ .

La pression de vapeur saturante de l'eau à la température ambiante est  $P_{\text{sat}} \approx 3 \times 10^3 \text{ Pa}$ .

Montrer qu'au-delà d'une certaine altitude, à préciser, ce modèle de pression n'est plus applicable. Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbation (attaque des matériaux, bruits ...).

□ 2 – Pour pallier cet inconvénient, on visse en A sur la partie finale horizontale de la conduite un injecteur (encart de la Fig. 1) de section décroissante et de diamètre de sortie  $d < D$ . Montrer que la vitesse en sortie de l'injecteur, notée  $c$ , est  $c = \sqrt{2gH}$  (relation de Torricelli). Calculer  $c$ .

Établir que la vitesse en A est  $V = \left( \frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2gH}$ .

□ 3 – Exprimer la pression  $P_2(z)$  à l'intérieur de la conduite munie d'injecteur. On admet que l'entrée de la conduite est pratiquement à l'altitude  $H$ . Montrer que les phénomènes de cavitation disparaissent dans toute la conduite si  $d$  est inférieur à un certain  $d_0$  dont on établira l'expression en fonction de  $D, P_0, H, g$  et  $\mu$ . Vérifier que  $d_0 \approx 26 \text{ cm}$ .

□ 4 – Le diamètre de sortie de l'injecteur est  $d = 12 \text{ cm}$ . La vitesse réelle du jet en sortie de l'injecteur est  $c' = 74 \text{ m.s}^{-1}$ . A quelle dénivellation, notée  $H'$ , cette vitesse correspondrait-elle ? Exprimer et calculer le *coefficient de contraction*  $C_c = \frac{H'}{H}$ . Donner quelques raisons de l'écart à l'unité de ce coefficient.

□ 5 – Exprimer et calculer le débit volumique réel  $q'$  de l'injecteur *avec pertes*, puis le débit massique  $D_m$  (en kg par seconde) en fonction de  $d$ , de  $c'$  et de  $\mu$ . Exprimer et calculer la puissance cinétique *réelle*  $P_c$  du jet en sortie (débit d'énergie cinétique transportée par le jet, pour la vitesse de sortie  $c'$  et le débit associé  $q'$ ).

□ 6 – Justifier que l'on nomme *puissance potentielle* la quantité  $P_{\text{pot}} = \mu q' g H$ . Exprimer et calculer le rendement de la conduite  $\eta = \frac{P_c}{P_{\text{pot}}}$  en fonction de  $C_c$ .

## Exercice 6 : Vase de Tantale, oscillateur de relaxation mécanique (CCP PC 2010)

Etude d'un exemple d'oscillateur mécanique, sans basculement de pièces mécaniques

On notera  $\rho$  la masse volumique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et l'on prendra pour valeurs numériques :  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

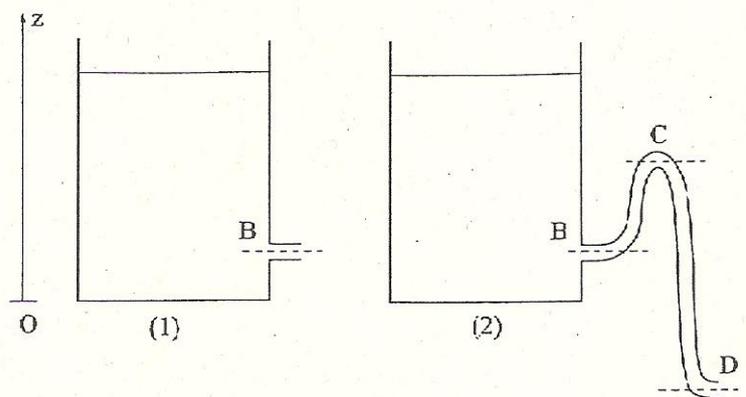


Figure I.1

### I.1. Vidange d'un réservoir :

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire  $S$ . Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical ( $Oz$ ) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir ( voir figure I,1 à gauche ) . ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur  $h$  et percé d'un orifice situé au niveau du point B à hauteur  $z_B$ . Cet orifice possède une section droite  $\sigma$ .

On nomme  $D_s$  le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir et l'extrémité de l'orifice sont en contact avec l'air , à la pression atmosphérique  $P_0 = 1 \text{ bar}$ . Tous les écoulements considérés sont assimilés à des écoulements non visqueux, homogènes, incompressibles et laminaires. La variable de temps est notée  $t$ .

I.1.1 On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur  $h(t)$  de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement.

Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement.

Quelle relation peut-on écrire entre la vitesse de la surface libre  $v_A$ , la vitesse  $v_B$  en B, et les sections  $\sigma$  et  $S$  ? Justifier.

I.1.2. Enoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de l'une de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses, et pour des sections droites  $S$  et  $\sigma$  quelconques, la vitesse du fluide  $v_B$  au niveau de l'orifice B. Que vaut alors le débit  $D_s$  ?

I.1.3. Que vaut la vitesse  $v_B$  dans la limite où  $\sigma \ll S$  ?

On conservera l'hypothèse  $\sigma \ll S$  pour toute la suite du problème

En déduire la valeur algébrique de  $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$ .

I.1.4. Calculer la valeur numérique du débit  $D_s$  lorsque  $h = 2 \text{ m}$ ,  $z_B = 0,1 \text{ m}$  et  $\sigma = 2 \text{ cm}^2$ . Exprimer le résultat dans les unités du système international, puis en litre par seconde ( $\text{L.s}^{-1}$ ).

### I.2. Influence du siphon :

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante  $\sigma$ , dont la hauteur maximale, représentée par le point C de la figure I.1 à droite, se trouve à une hauteur  $z_C$  supérieure à la hauteur  $z_B$  de l'orifice d'entrée de la conduite. Un siphon peut se trouver dans deux états. Dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'un bout à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se trouve alors en contact avec l'air à pression atmosphérique  $P_0$ . Dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau de l'eau excède  $z_C$ .

I.2.1. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit constant  $D_s$ , que l'on exprimera en fonction de  $h$ ,  $g$ ,  $\sigma$  et de la hauteur d'eau d'un des trois points B, C ou D.

I.2.2. Former une équation différentielle du premier ordre pour l'évolution temporelle de la hauteur  $h(t)$  de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé.

1.2.3. Trouver la solution de cette équation différentielle en partant d'une condition initiale  $h(0) = h_0 > z_C$ . En déduire la durée nécessaire  $t_1$  pour que le siphon se désamorçe.

### I.3. Réservoir alimenté :

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit  $D_i$ , arrivant par l'orifice A, et qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange ( figure I.2. ).

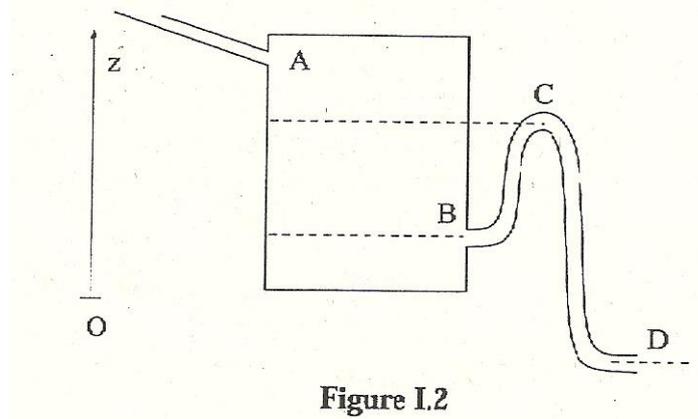


Figure I.2

I.3.1. Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur  $h(t)$  en présence du débit  $D_i$ , le siphon étant amorcé ?

I.3.2. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire de hauteur  $h_s$  constante, que l'on exprimera en fonction de  $z_D$ ,  $D_i$ ,  $\sigma$  et  $g$ .

Cette solution est-elle acceptable si la valeur de  $h_s$  associée à un débit  $D_i$  est telle que  $h_s < z_B$  ? Justifier.

I.3.3. Décrire l'évolution de la hauteur  $h(t)$  lorsque le siphon est désamorcé.

I.3.4. Montrer que si le débit  $D_i$  est plus faible qu'une valeur critique  $D_c$ , le système représenté sur la figure I.2. se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps.

Déterminer la valeur de  $D_c$ .

I.3.5. On suppose  $D_i < D_c$ . Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur  $h(t)$  en fonction du temps  $t$ .

## Partie I - Étude d'un aérogénérateur

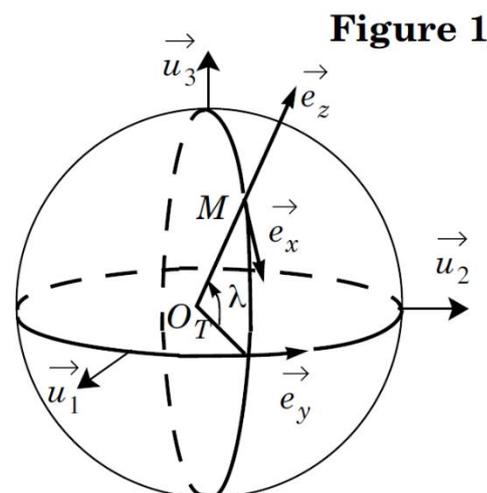
Ce problème s'intéresse à différents aspects du fonctionnement d'une éolienne destinée à produire de l'énergie électrique.

Les différentes parties sont largement indépendantes les unes des autres.

Le document annexe à rendre avec la copie concerne les questions I.A.6 et I.C.3.

### I.A - Étude des vents dominants

La Terre est considérée comme une sphère de rayon  $R_T$  de centre  $O_T$ . Le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$  est considéré comme galiléen. On lui lie un repère direct  $(O_T, u_1, u_2, u_3)$  où  $u_3$  est parallèle à l'axe des pôles et est orienté du Sud vers le Nord. Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \Omega u_3$  par rapport à  $\mathcal{R}_G$ . À tout point  $M$  de la surface de la Terre, de latitude  $\lambda$ , on associe un repère local  $(M, e_x, e_y, e_z)$ , lié à  $\mathcal{R}_T$ , tel que  $e_z$  soit colinéaire à  $O_T M$  et orienté vers l'extérieur, et que  $e_x$  soit dirigé vers le Sud. La latitude  $\lambda$  peut varier de  $-\pi/2$  (pôle Sud) à  $+\pi/2$  (pôle Nord). On note  $\vec{g}$  le



Coordonnées et repères utilisés

champ de pesanteur à la surface de la Terre, on fera l'approximation de le considérer comme dirigé selon  $-e_z$ . L'atmosphère est une fine couche d'air à la surface de la Terre. L'air sera considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $\mathcal{M}$ . On note  $\vec{v}$  le champ eulérien des vitesses dans l'atmosphère, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_T$ ,  $P(x, y, z)$  celui des pressions et  $\rho(x, y, z)$  la masse volumique de l'air.

Pour les applications numériques, on prendra

$$R_T = 6370 \text{ km}, \quad \Omega = 2\pi/86164 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad \mathcal{M} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ (constante des gaz parfaits).}$$

On négligera la viscosité de l'air et en conséquence on considérera les écoulements dans l'atmosphère comme parfaits. L'étude menée dans cette partie I ne concerne que les vents dominants, c'est-à-dire des écoulements de grande échelle, relativement réguliers dans le temps (on fera d'ailleurs à partir du I.A.4

une hypothèse de stationnarité). Ces vents représentent des vents « moyens », auxquels se rajoutent dans la réalité des vents plus locaux et des vents plus conjoncturels (passage d'un anticyclone, d'une dépression...)

I.A.1) Montrer que la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à une particule de fluide de l'atmosphère, s'écrit sous la forme :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad (1)$$

Pourquoi ne voit-on pas apparaître dans cette équation de terme de force d'inertie d'entraînement ?

I.A.2) En faisant l'hypothèse que l'atmosphère est isotherme à la température  $T$ , établir l'expression que prendrait la pression  $P_{\acute{e}q}(x, y, z)$  si l'air était à l'équilibre (c'est-à-dire immobile en tout point par rapport à  $\mathcal{R}_T$ ). En déduire un ordre de grandeur de l'épaisseur de l'atmosphère.

I.A.3) On note alors  $p(x, y, z) = P(x, y, z) - P_{\acute{e}q}(x, y, z)$ .

$$\text{Établir l'équation (2) reliant } \rho, \vec{v}, p \text{ et } \vec{\Omega}. \quad (2)$$

On se limite maintenant à l'étude d'écoulements stationnaires dans  $\mathcal{R}_T$ .

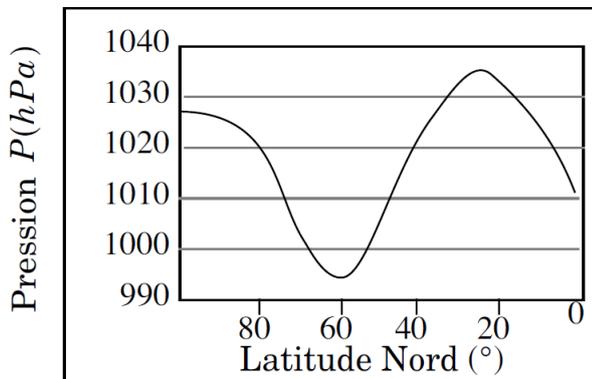
I.A.4) On note  $U$  un ordre de grandeur caractéristique des vitesses de l'écoulement,  $L$  une dimension horizontale caractéristique de celui-ci. On appelle nombre de Rossby (noté  $Ro$ ) d'un écoulement le rapport sans dimension entre le terme d'accélération et le terme lié à la force de Coriolis dans l'équation (2). Évaluer  $Ro$  pour un écoulement atmosphérique typique pour lequel  $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $L = 1000 \text{ km}$ . Commenter le résultat obtenu : en fonction de la valeur de  $Ro$ , quels sont les termes prédominants dans l'équation (2) ?

I.A.5) On considère des écoulements atmosphériques de bas nombre de Rossby ( $Ro \ll 1$ ), appelés écoulements géostrophiques et on ne gardera que les termes prédominants dans l'équation (2). La faible épaisseur de l'atmosphère (voir la question I.A.2) permet également de négliger la composante verticale  $v_z$  de l'écoulement. Établir l'expression du champ de vitesse  $\vec{v}$  de ces écoulements en fonction de  $\underline{e}_z, \overrightarrow{\text{grad}} p, \rho, \Omega$  et  $\lambda$ . Expliquer pourquoi seule la composante horizontale de  $\overrightarrow{\text{grad}} p$  intervient en fait dans l'expression de  $\vec{v}$ .

I.A.6) La figure 2 donne la valeur moyenne de la pression atmosphérique  $P$  au niveau du sol, le long d'un méridien quelconque, en fonction de la latitude, pour l'hémisphère nord. La figure 3 donne la circulation générale des vents

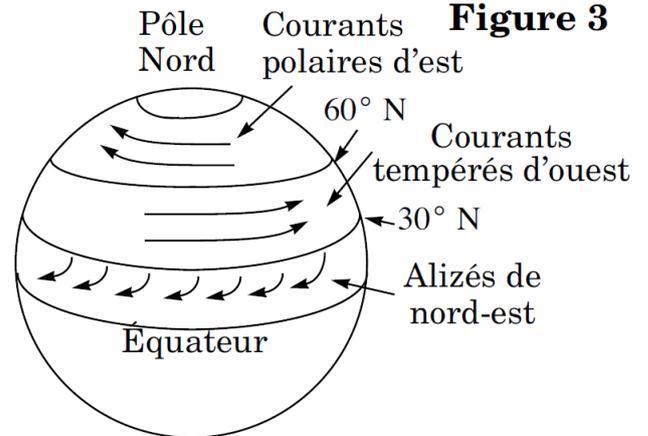
moyens dans l'hémisphère nord. Faire le lien entre ces deux figures et discuter de la validité du modèle étudié, suivant la latitude  $\lambda$ . Compléter la figure 3, qui a été reproduite en annexe, en faisant figurer la circulation générale des vents moyens dans l'hémisphère sud (on admettra que la pression moyenne  $P$  est une fonction paire de  $\lambda$ ).

**Figure 2**



*Pression atmosphérique moyenne, au niveau du sol, dans l'hémisphère nord, en fonction de la latitude.*

**Figure 3**



*Circulation générale des vents moyens dans l'hémisphère nord.*

I.A.7) Estimer numériquement la norme de la vitesse des vents dominants à la latitude de  $45^\circ$ .