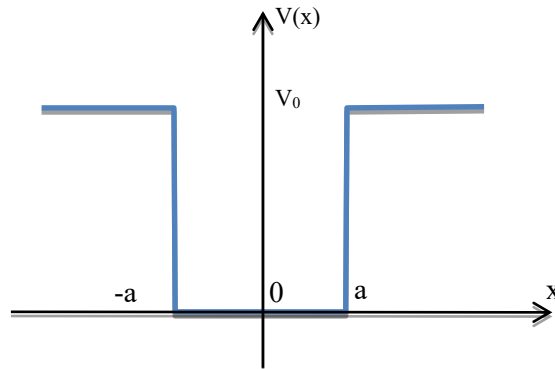


MécaQ chap.2 – Activités

Cas d'un potentiel uniforme par morceaux

1. Puits de potentiel stationnaire, rectangulaire de profondeur infinie

1.2 Quantification de l'énergie des états stationnaires



$2a \approx 10^{-15}$ m si l'on considère un nucléon dans un noyau

Activité 1 : Etats stationnaires d'un puits INFINI ✪

On recherche une famille de solutions sous la forme d'états stationnaires.

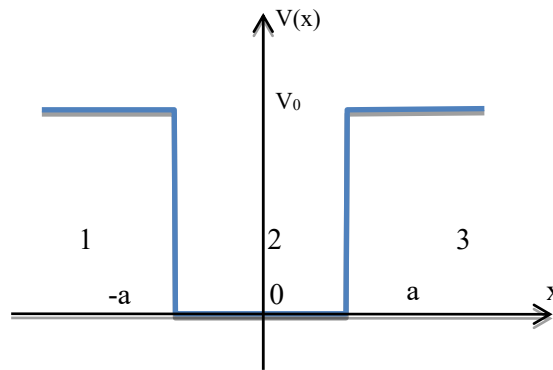
- A. Rappeler la forme mathématique d'un état stationnaire (rappel $E > 0$)
- B. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour la partie spatiale $\varphi(x)$
- C. En déduire la forme des solutions

Conformément au programme, on admet la condition à la limite suivante :
 $\varphi(x)$ est continue sur les parois du puits

- D. En déduire la quantification du vecteur d'onde en distinguant deux cas
- E. Synthétiser ces deux cas en un seul :
 - en exprimant sous une seule formule la quantification du vecteur d'onde (et de la longueur d'onde)
 - en en déduisant une quantification de l'énergie
 - en remarquant qu'un cas correspond à des fonctions paires, et l'autre à des fonctions impaires
- F. (*facultatif*) Via la condition de normalisation, déterminer la constante d'intégration

2. Puits de potentiel stationnaire de profondeur finie

On considère cette fois un puits de profondeur V_0 finie, compris entre $-a$ et a , qui définit trois régions de l'espace.



2.2 Recherche des états stationnaires liés

Activité 2.1 : Etats stationnaires liés d'un puits FINI, écritures math ☼

On recherche une famille de solutions sous la forme d'états stationnaires.

- A. Rappeler la forme mathématique d'un état stationnaire (rappel $E > 0$)
- B. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour la partie spatiale $\varphi(x)$:
 - dans la zone 2
 - dans les zones 1 et 3
- C. En déduire la forme des solutions dans les trois régions (donner les expressions de k_1 et k_2) :

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= A_2 \cdot e^{ik_2x} + B_2 \cdot e^{-ik_2x} \\ \varphi_1(x) &= A_1 \cdot e^{k_1x} + B_1 \cdot e^{-k_1x} \\ \varphi_3(x) &= A_3 \cdot e^{k_1x} + B_3 \cdot e^{-k_1x}\end{aligned}$$

- D. En invoquant la condition de normalisation, montrer que deux constantes d'intégration sont nulles

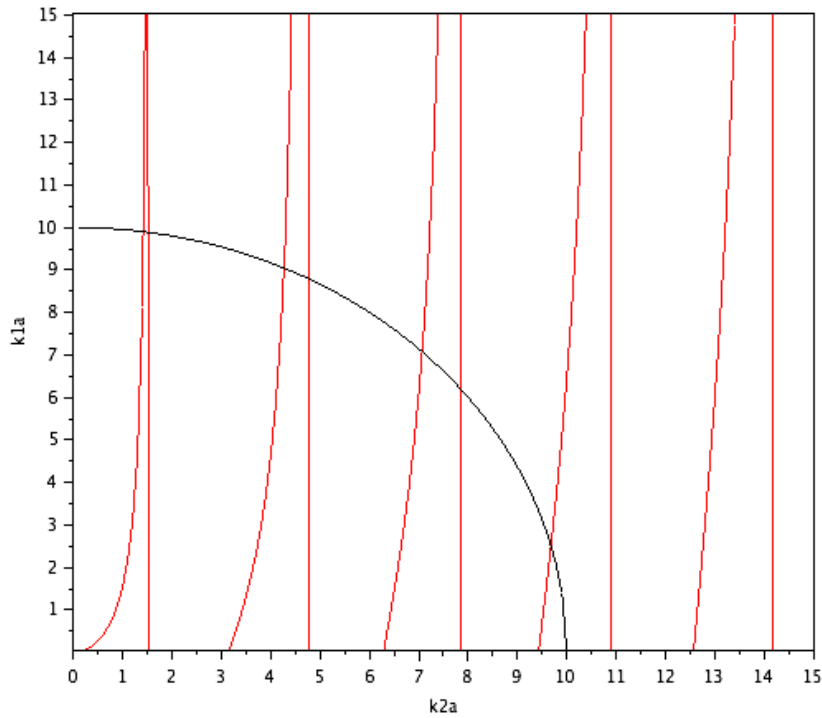
2.3 Quantification de l'énergie – Modes pairs et impairs

Relations issues de l'application des CLimites sur les parois du puits fini :

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

avec la disjonction de cas suivante :

$$\begin{aligned}\text{soit } k_1 a &= k_2 a \times \tan(k_2 a) \\ \text{soit } k_1 a &= -k_2 a \times \cotan(k_2 a)\end{aligned}$$



Activité 2.2 : Etats stationnaires liés d'un puits FINI, modes PAIRS ☼

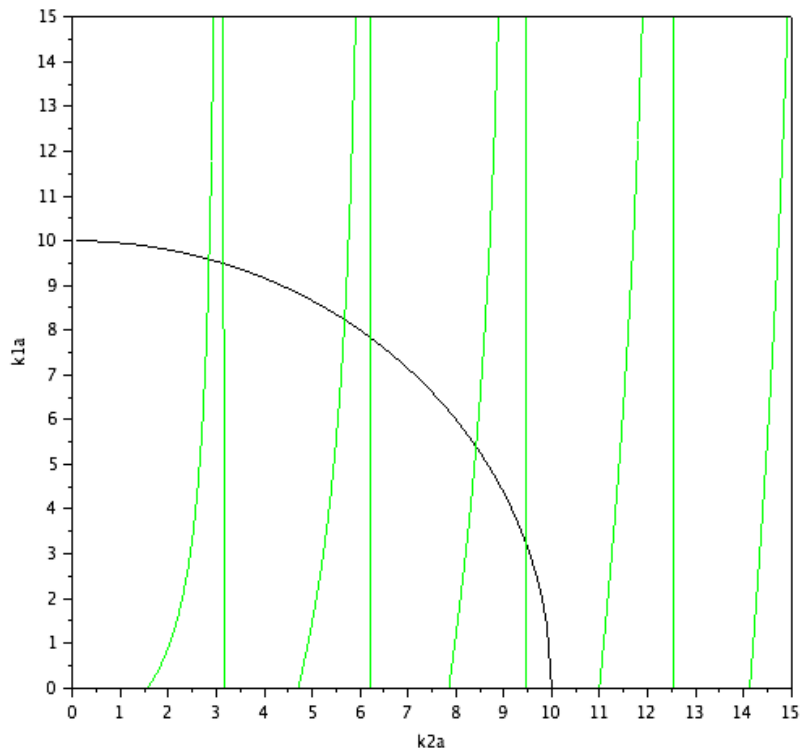
On trace, en fonction de la variable $X \stackrel{\text{def}}{=} k_2 a$, les deux courbes associées à $Y \stackrel{\text{def}}{=} k_1 a$:

- $Y = X \tan X$
- $Y = \sqrt{\beta - X^2}$

pour une valeur donnée de $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$, prise égale à 100 sur le graphe ci-dessus.

Les solutions sont donc données par les intersections des deux courbes.

- A. Indiquer sur le graphe les solutions possibles pour $k_1 a$ et $k_2 a$
- B. Selon les valeurs possibles de V_0 , existe-t-il toujours au moins un niveau d'énergie ?
- C. Comment le nombre de niveaux dépend-il de V_0 ?



Activité 2.3 : Etats stationnaires liés d'un puits FINI, modes IMPAIRS ⚡

On trace, en fonction de la variable $X \stackrel{\text{def}}{=} k_2 a$, les deux courbes associées à $Y \stackrel{\text{def}}{=} k_1 a$:

- $Y = -X \cotan X$
- $Y = \sqrt{\beta - X^2}$

pour une valeur donnée de $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$, prise égale à 100 sur le graphe ci-dessus.

Les solutions sont donc données par les intersections des deux courbes.

- A. Comment se situent les niveaux des états impairs par rapport aux niveaux des états pairs ?
- B. Existe-t-il toujours des modes impairs ?
- C. Synthétiser l'activité 2, et comparer aux résultats du puits infini