DS 3 -- Méca des fluides – Bilans macros – Transport de charge *(10/12/2016 – 4h)*

Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés, il sera retiré 1 point /20 à la note finale.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.
Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

Aucune sortie n'est autorisée avant 12h

***Résolution de Pb 1* : la baignoire peut-elle déborder ?** *(20min < durée < 30 min)*

Une baignoire se remplit en 8 min lorsque le robinet est ouvert, et la baignoire bouchée.
Elle se vide en 12 min lorsque le robinet est fermé et la baignoire libre de se vider (trou non bouché).

La baignoire déborde-t-elle si on ouvre le robinet tout en laissant la baignoire libre de se vider ?

Problème 2 : *Vidange d'une citerne* *(E3A PSI 2016)*

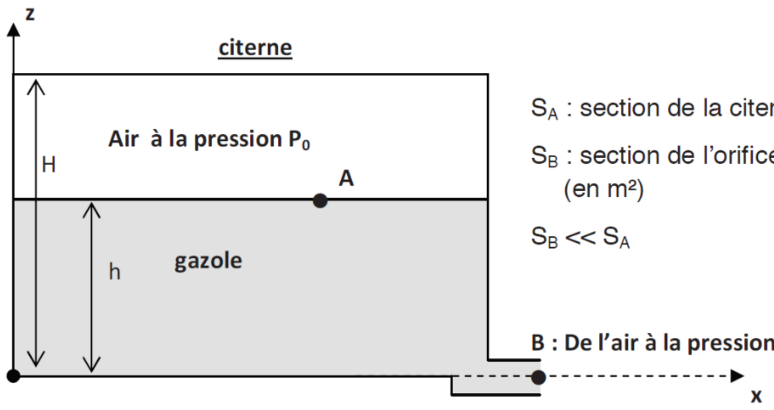
D / Ecoulement parfait

La citerne est munie d'un orifice par lequel le gazole peut s'écouler.
On suppose que toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse appliquer la relation de Bernoulli entre un point A de la surface libre du gazole et un point B au niveau de l'ouverture (voir figure ci-après) :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_B^2-V_A^2\right)+\rho g\left(z_B-z_A\right)+\left(p_B-p_A\right)=0$$

où

ρ est la masse volumique du gazole,
V_A (respectivement V_B) correspond à la vitesse moyenne (encore appelée vitesse débitante) de l'écoulement supposée constante au niveau de la section S_A (respectivement S_B),
p_A (respectivement p_B) correspond à la pression de l'écoulement supposée constante au niveau de la section S_A (respectivement S_B),
g est l'intensité du champ de pesanteur.



S_A : section de la citerne au niveau du point A (en m²)

S_B : section de l'orifice d'écoulement au niveau du point B (en m²)

$S_B << S_A$

D1. Quelles sont les conditions d'application de la relation de Bernoulli ?

D2. Comment se traduit la conservation de la masse lors de l'écoulement ?

En déduire une relation entre les vitesses moyennes en *A* et *B*.

D3. Sachant que la section en *A* est nettement plus grande que celle en *B*, exprimer la vitesse moyenne V_B de l'écoulement en *B* à l'aide de *h* et *g*.

D4. La citerne est initialement pleine.

Exprimer le temps nécessaire *T* pour la vidanger complètement, à l'aide de S_A, S_B, *H* et *g*.

Calculer *T*.

E / Prise en compte d'une perte de charge singulière

Au niveau du convergent (rétrécissement de section sur la ligne de courant AB), on constate une zone de perturbation caractérisée énergétiquement par une « perte de charge singulière » : le bilan d'énergie se traduit par une perte d'énergie mécanique volumique modélisable par la formule suivante :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_B^2-V_A^2\right)+\rho g\left(z_B-z_A\right)+\left(p_B-p_A\right)=-\frac{1}{2}K_C\rho V_B^2 \quad \text{avec } K_c \approx 0{,}55 \text{ (sans dimension)}$$

E1. Déterminer une nouvelle expression de V_B en tenant compte de la perte de charge singulière.

E2. Exprimer à nouveau le temps nécessaire *T'* pour vidanger complètement la citerne, à l'aide de *T* et K_c.

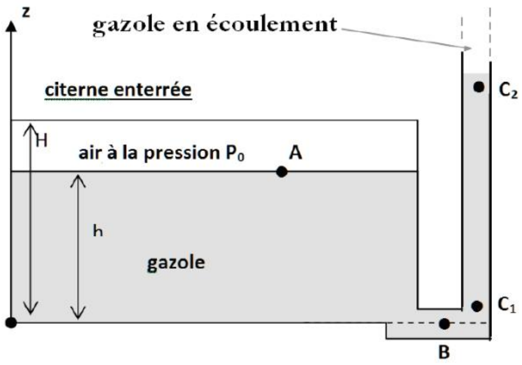
Calculer *T'*. Commenter.

F / Prise en compte d'une perte de charge régulière

On accroche au niveau de B une conduite cylindrique verticale de grande longueur et de diamètre $d = 2a$. La figure ci-contre ne représente qu'une portion $\ell = C_1C_2$ de cette conduite.

L'étude de l'écoulement entre C_1 et C_2 nécessite alors la prise en compte de la dissipation d'énergie par frottement dû à la viscosité du gazole.

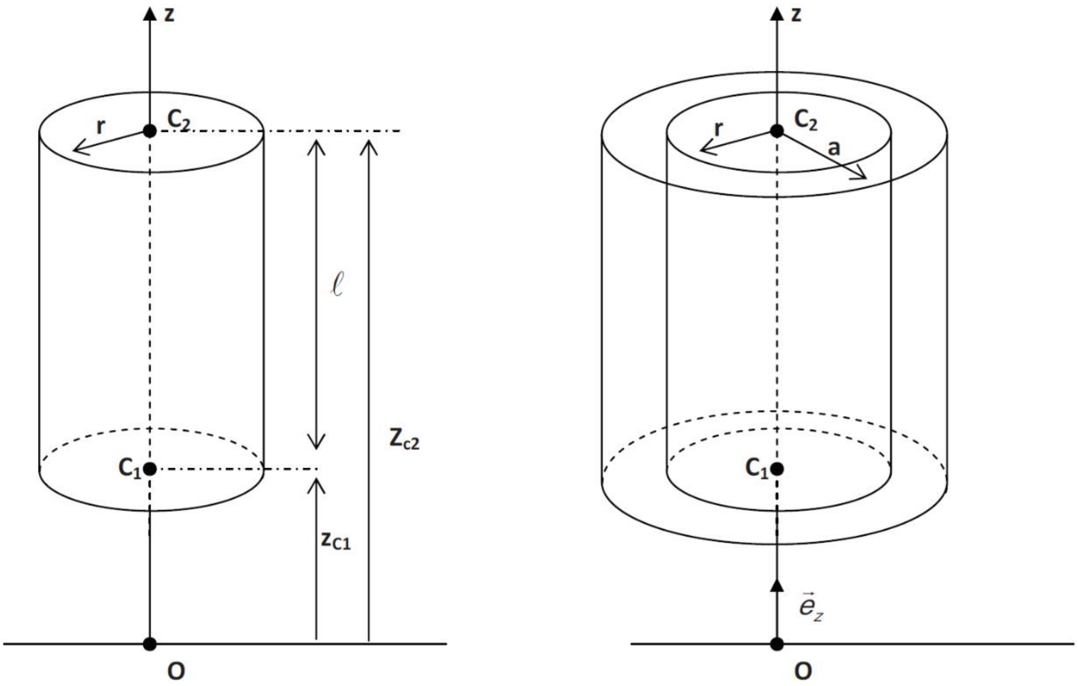
Dans la suite, on considère que le gazole est un fluide incompressible, de masse volumique constante ρ, de viscosité dynamique η, en écoulement stationnaire.



On suppose de plus que l'écoulement est laminaire et que le champ de vitesse est à symétrie cylindrique

$$\vec{V}(r) = V(r)\vec{e}_z$$

avec $V(r) > 0$ et une vitesse nulle le long des parois et maximale sur l'axe de la conduite. Les pressions sont supposées constantes pour une altitude donnée : p_{C1} est la pression en C_1 à l'altitude z_{C1}, p_{C2} est la pression en C_2 à l'altitude z_{C2}.



On isole par la pensée un cylindre de fluide de rayon r inférieur à a et de longueur ℓ. Ce cylindre subit des forces pressantes en C_1 et C_2, son poids et des forces visqueuses modélisées par la loi suivante :

$$\vec{f} = \eta \frac{dV}{dr} \Sigma \, \vec{e}_z$$

Où Σ représente la surface latérale de contact entre le fluide contenu dans le cylindre et celui à l'extérieur du cylindre.

F1. Faire un bilan de quantité de mouvement pour ce cylindre et établir la relation suivante :

$$\frac{dV}{dr} = -\alpha \cdot \left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right) \cdot r$$

avec $\tilde{p} = p + \rho g z$ et α un facteur que l'on exprimera à l'aide de η et ℓ. Commentez le signe de α.

F2. Montrer que *V(r)* s'écrit : $V(r) = V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$. Exprimer V_{max} à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

F3. Déterminer l'expression du débit volumique Q_V à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

F4. En déduire l'expression de la vitesse moyenne V_{moy} dans une section de la conduite (encore appelée vitesse débitante) à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}\right)$.

La « perte de charge régulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des frottements visqueux) est définie par $\Delta p_r = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{d}$ *où* λ *est une constante sans dimension dépendant de la nature de l'écoulement et de la rugosité de la conduite,* ℓ *la longueur de la conduite et d son diamètre.*
On a par ailleurs: $\tilde{p}_{C_2} - \tilde{p}_{C_1} = -\Delta p_r$ pour une canalisation de section constante.

F5. Déterminer l'expression de λ à l'aide de η, ρ, V_{moy} et *a*.

F6. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds R_e pour une conduite cylindrique en fonction de son diamètre d, de la vitesse moyenne V_{moy}, de la masse volumique ρ et de la viscosité η.

Pour un écoulement laminaire, en déduire l'expression de λ à l'aide du nombre de Reynolds, R_e.

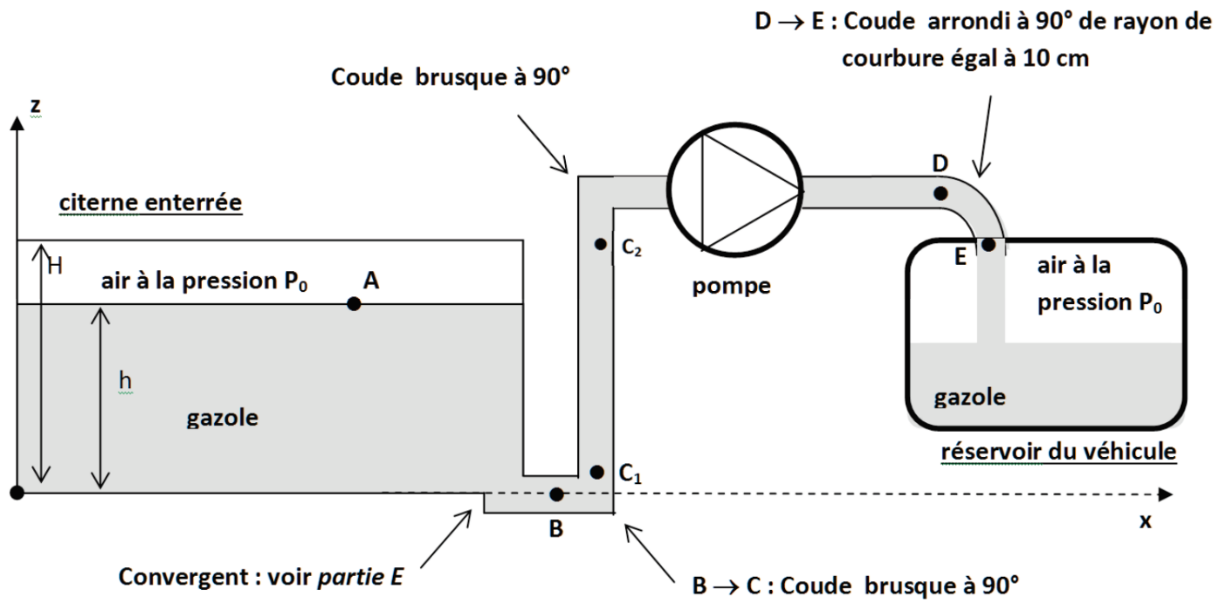
F7. Calculer le nombre de Reynolds R_e à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

F8. Rappeler comment le nombre de Reynolds, R_e peut être utilisé pour caractériser la nature de l'écoulement.

L'hypothèse d'écoulement laminaire utilisée jusqu'à la question **F7** est-elle valide ?

G / Remplissage du réservoir d'une voiture

On utilise une pompe centrifuge pour déplacer le gazole de la citerne au réservoir d'une voiture. Le schéma suivant modélise simplement le circuit du fluide (la citerne étant enterrée, on a bien évidemment $z_E > z_A$*)*
La « perte de charge singulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des coudes, des raccords entre canalisations de diamètres différents…) est définie par $\Delta p_s = K \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2$ *où K est une constante sans dimension dépendant de la nature de la singularité rencontrée. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient* $K_{pompe} = 6$.



G1. Utiliser le document, page 12, intitulé « Données numériques » pour déterminer la valeur numérique du coefficient K_{total} correspondant à l'ensemble des singularités détaillées sur le schéma ci-dessus. On prendra soin de préciser les différents termes intervenant dans K_{total}.

G2. Calculer la valeur totale des pertes de charge singulières $\Delta p_{s,tot}$ à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

G3. La totalité des longueurs droites de la conduite vaut approximativement ℓ = 10 m.
On admettra la valeur suivante pour le coefficient de perte de charge régulière : $\lambda = 2{,}45.10^{-2}$.
Calculer la valeur totale des pertes de charge régulières $\Delta p_{r,tot}$ à l'aide des données numériques fournies en fin de sujet.

L'insertion d'un élément actif (ici la pompe électrique) dans le circuit du fluide modifie le bilan énergétique appliqué au gazole. En tenant compte des pertes de charge, on admet la relation suivante appliquée entre les points A et E :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_E^2 - V_A^2\right) + \rho g\left(z_E - z_A\right) + \left(p_E - p_A\right) = -\left(\Delta p_{r,tot} + \Delta p_{s,tot}\right) + \frac{P_u}{Q_V}$$

où P_u est la puissance utile fournie par la pompe au fluide et Q_V est le débit volumique.

G4. Calculer le débit volumique dans les conduites Q_V à l'aide des données numériques fournies.

G5. Sachant que la pompe a un rendement de 80%, déterminer l'expression de P_e, puissance électrique alimentant la pompe. Calculer P_e (on prendra $z_E - z_A \approx 5$ m).

<u>Problème 3</u> : *Semi-conducteurs et jonction PN* *(CCP PSI 2009)*

Dans tout ce problème, $k_B = 1{,}38\cdot10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$ *représente la constante de Boltzmann,*
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ *représente la constante d'Avogadro,*
et $e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$ *représente la charge élémentaire.*

Modèle de Drude de la conduction électrique (1900)

On considère un matériau conducteur dans lequel les électrons libres sont uniformément répartis dans le volume du matériau. On note n_e le nombre par unité de volume de ces électrons . Les interactions entre les électrons sont <u>négligées</u> et celles entre les électrons et le réseau cristallin sont modélisées par une force de type frottement visqueux subie par chaque électron de masse m selon la relation vectorielle $\vec{f} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$ où τ est une constante propre au matériau et $\vec{v}$ la vitesse d'un électron dans le référentiel lié au matériau conducteur. Un champ électrique $\vec{E}$ est appliqué dans le matériau. On négligera le poids de l'électron devant les autres forces.

A.1 Quelle est l'unité de τ dans le Système International ? Justifier.
A.2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel lié au matériau et supposé galiléen, montrer que la vitesse d'un électron tend, en régime permanent, vers une constante que l'on précisera en fonction de $\vec{E}$**,** m**,** τ et e la charge élémentaire (e valeur positive).

A.3 En déduire l'expression du vecteur densité volumique de courant électrique $\vec{j}_{el}$ en fonction de $\vec{E}$**,** m**,** n_e et τ**.** Donner alors l'expression de la conductivité électrique du matériau en fonction des paramètres précédents.

A.4 Dans le cas du cuivre, chaque atome libère un seul électron qui participera à la conduction électrique.
La densité du cuivre par rapport à l'eau est $d = 8{,}9$ et la masse molaire du cuivre est $M_{Cu} = 63{,}5\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
Donner l'expression littérale du nombre d'électrons de conduction par unité de volume n_e en fonction de d, M_{Cu} et de la constante d'Avogadro N_A.
Effectuer l'application numérique.
Comparer avec la densité électronique du silicium, semi-conducteur très répandu, qui est de l'ordre de $10^{19}\,\mathrm{cm^{-3}}$ à température ambiante.

Résistivité du silicium en fonction de la température

On réalise une pastille cylindrique de silicium comportant n_e électrons de conduction par unité de volume. On mesure la résistance de cette pastille en fonction de la température et on en déduit la résistivité du silicium.

A.5 Rappeler la relation existant entre la résistance R d'une pastille cylindrique de longueur ℓ et de section S et la résistivité ρ du matériau.

A.6 Un dispositif permet d'abaisser la température du silicium. On mesure la résistivité du silicium entre 4,2 K (température de liquéfaction de l'hélium) et 12 K. On relève le tableau de mesures suivant :

T (K)	4,2	4,6	5,0	5,4	6,2	7,0
ρ (Ω.m)	$5{,}9.10^5$	$6{,}0.10^4$	9000	1750	125	16,5
T (K)	8,0	10,0	12,0			
ρ (Ω.m)	2,35	0,15	0,024			

Montrer à l'aide d'une représentation graphique **ou** d'une régression linéaire, en utilisant la calculatrice, que la résistivité suit une loi du type : $\rho(T) = A \cdot e^{B/T}$.
Calculer B et A. Ne pas oublier les unités !

A.7 Evaluer la résistivité du silicium à 300 K. La comparer à celle du cuivre qui est de l'ordre de $\rho_{Cu} = 10^{-8}\Omega \cdot \mathrm{m}$.

A.8 D'après vos connaissances, quand on augmente (ou que l'on diminue) la température d'un métal comme le cuivre, comment varie la résistivité ? En est-il de même pour le silicium ?

A.9 En utilisant la formule du **A.3**, montrer que la densité électronique n_e suit une loi dite de Boltzmann, c'est-à-dire que $n_e = n_e^0 \cdot e^{\frac{-E_S}{k_B T}}$ où l'on ne cherchera pas à déterminer n_e^0 et où k_B représente la constante de Boltzmann. On donnera la valeur numérique de la grandeur E_s en électron-volt.
En plaçant des impuretés dans un matériau semi-conducteur, on peut contrôler la résistivité électrique. Cette dernière varie de façon considérable en fonction de la concentration en impuretés : c'est le dopage.

Les porteurs de charge

Modèle de semi-conducteur :
Pour comprendre la variation de la résistivité du silicium avec la température, il faut admettre que les électrons dans le silicium ne peuvent être que dans « deux états » : soit ils sont libres (électrons conducteurs), soit ils sont liés (électrons de valence). Pour qu'un électron passe de l'état lié à l'état libre, il faut lui fournir de l'énergie. Il laisse alors une place vacante dans l'ensemble des électrons liés : c'est ce qu'on appelle un trou.

A.10 Que vaut la « charge électrique » d'un trou en fonction de la charge élémentaire e ?

On montre que le mouvement collectif des électrons de valence (très nombreux) peut être décrit par celui de l'ensemble des trous (beaucoup moins nombreux). De ce point de vue les trous peuvent être assimilés à des porteurs de charge indépendants et distincts des électrons de conduction.
On note n le nombre d'électrons conducteurs par unité de volume et p le nombre de trous par unité de volume. On admettra que le produit $n \cdot p$ est une constante au carré, notée n_i^2, dépendant de la température et du matériau : $n \cdot p = n_i^2$.

A.11 On parvient à fabriquer un matériau semi-conducteur à base de silicium dans lequel quelques atomes de bore (symbole B) ou de phosphore (symbole P) se substituent à des atomes de silicium, et ce, de manière uniforme sur tout le volume du matériau. On parle de dopage au bore ou au phosphore. Soit N_B (respectivement N_P) la densité volumique d'atomes de bore (respectivement de phosphore) présents dans le matériau .

On donne un extrait du tableau périodique des éléments :

H							He
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

Figure 1: extrait du tableau périodique

Combien d'électrons de valence maximale possèdent le silicium, le bore et le phosphore ?

On admet que le phosphore perd un électron : quel ion est formé ?
On admet que le bore gagne, quant à lui, un électron : quel ion est formé ?

A.12 Dans le cas du dopage au phosphore, augmente-t-on la densité d'électrons libres ou de trous ? Sachant que le matériau est électriquement neutre, que vaut la somme $p + N_P$ en fonction de n (densité volumique totale d'électrons libres) ? En se rappelant que $n \cdot p = n_i^2$, calculer n et p dans le cas où $n_i << N_P$. Comparer n à p. On parle alors de « dopage N ».

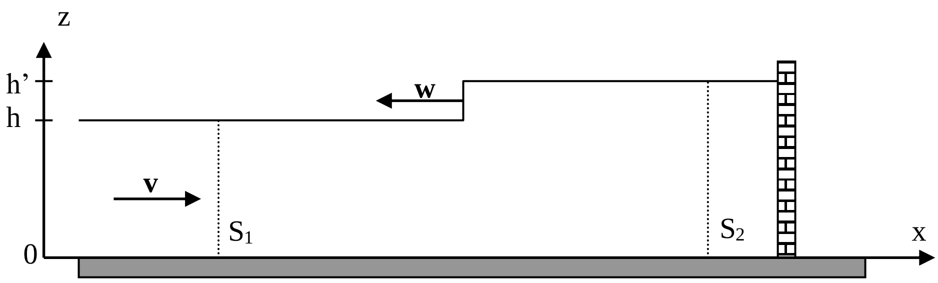
A.13 Par analogie avec la question précédente, donner l'expression de *n* et *p* dans le cas du dopage au bore avec $n_i << N_B$. On parle de « dopage P ».

***Problème 4* : Ressaut hydraulique**

Un canal de largeur L est obstrué par une paroi verticale (fermeture « brutale » d'une écluse). Une vague remonte alors le canal à une célérité w dans le référentiel terrestre.
La hauteur d'eau en amont du ressaut est h, et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est h' et la vitesse nulle. Les grandeurs h, h' et v sont constantes.

Dans tout le problème, on se place dans le référentiel lié à la vague, supposé galiléen (car en TRU dans le référentiel terrestre).

On étudie le système ouvert (S) de fluide délimité par les sections (en pointillés) amont S_1 et aval S_2, ***sections fixes dans le référentiel d'étude***. Pour simplifier, on supposera que le front de la vague est vertical.



Attention le schéma est dessiné dans le référentiel terrestre, qui n'est pas le référentiel d'étude

1. Quelle est la vitesse du fluide entrant dans (S) au niveau de S_1, et celle en ressortant au niveau de S_2 ?

2. En traduisant la conservation de la masse, établir une relation entre v, w, h et h'.

3. Définir un système fermé (S^*) approprié, et montrer que la variation de la composante horizontale de sa quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dP_x^*}{dt} = -\rho L h \times g(v,w)$$

où g(v,w) est une fonction à expliciter.

4. La pression étant P_0 à la surface du fluide, calculer la pression régnant dans l'eau en amont puis en aval du ressaut.

5. Que vaut la résultante *horizontale* des forces de pression sur le système (S^*) ? En déduire l'expression de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur (S) en fonction de ρ, g, L, h et h'.

6. En déduire alors que h(v+w)v = ½.g.f(h,h') où f(h,h') est une fonction à expliciter.

7. En déduire la célérité de la vague en fonctionde g, h et h'. Que vaut-elle si h ≈ h' ?

Fin de l'énoncé