

**Problème 1.A. : Extrait CCINP 2022**

Lorsqu'on veut mesurer la vitesse de l'air à l'intérieur des habitations, par exemple pour contrôler le bon fonctionnement d'un système de ventilation, on utilise préférentiellement un anémomètre à fil chaud. Son principe est le suivant : un fil électrique parcouru par un courant s'échauffe par effet Joule, tandis qu'il est refroidi par l'air circulant autour du fil. Plus l'air a une vitesse élevée, plus l'effet de refroidissement est important.

**II.1 - Principe de la mesure**

L'anémomètre à fil chaud est représenté sur la **figure 3**. Un fil électrique, de diamètre  $d = 1 \mu\text{m}$  et de longueur  $\ell = 1 \text{ mm}$ , est parcouru par un courant continu d'intensité  $I$ . Sa résistance  $R_f$  dépend de la température  $T_f$  du fil, supposée uniforme dans tout le fil :  $R_f = R(T_f) = R_0(1 + \gamma(T_f - T_0))$ , où  $T_0$  est la température de l'air loin du fil,  $R_0$  la résistance du fil à  $T_0$ , et  $\gamma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  une constante caractéristique du matériau dont est constitué le fil.



**Figure 3 - Anémomètre à fil chaud**

L'air s'écoule à la vitesse  $U$  perpendiculairement au fil. Sur l'ensemble des modes de transfert thermique possibles entre le fil et son environnement, c'est la convection forcée par l'écoulement de l'air qui est le mode prédominant. Ainsi, le transfert thermique cédé par le fil à son environnement pendant la durée  $dt$  est donné par la loi de Newton :

$$\delta Q_{\text{cédé}} = h(T_f - T_0)S_{\text{lat}} dt$$

avec  $S_{\text{lat}}$  la surface latérale du fil en contact avec l'air et  $h$  le coefficient de transfert thermique de surface. On traduit l'efficacité de la convection forcée avec la vitesse  $U$  de l'écoulement par la relation :

$$h = a_0 + b_0\sqrt{U}$$

où  $a_0$  et  $b_0$  sont deux constantes.

**Attention : ci-dessous  $\rho_{Pt}$  est la résistivité, c'est l'inverse de la conductivité**

**Q13.** Le fil est en platine, de conductivité  $\rho_{Pt} = 1,11 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$  à  $T_0 = 300 \text{ K}$ . Calculer  $R_0$ .

**Q14.** On se place en régime permanent : le fil est à la température  $T_f$  constante. En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur le fil, établir la loi de King :

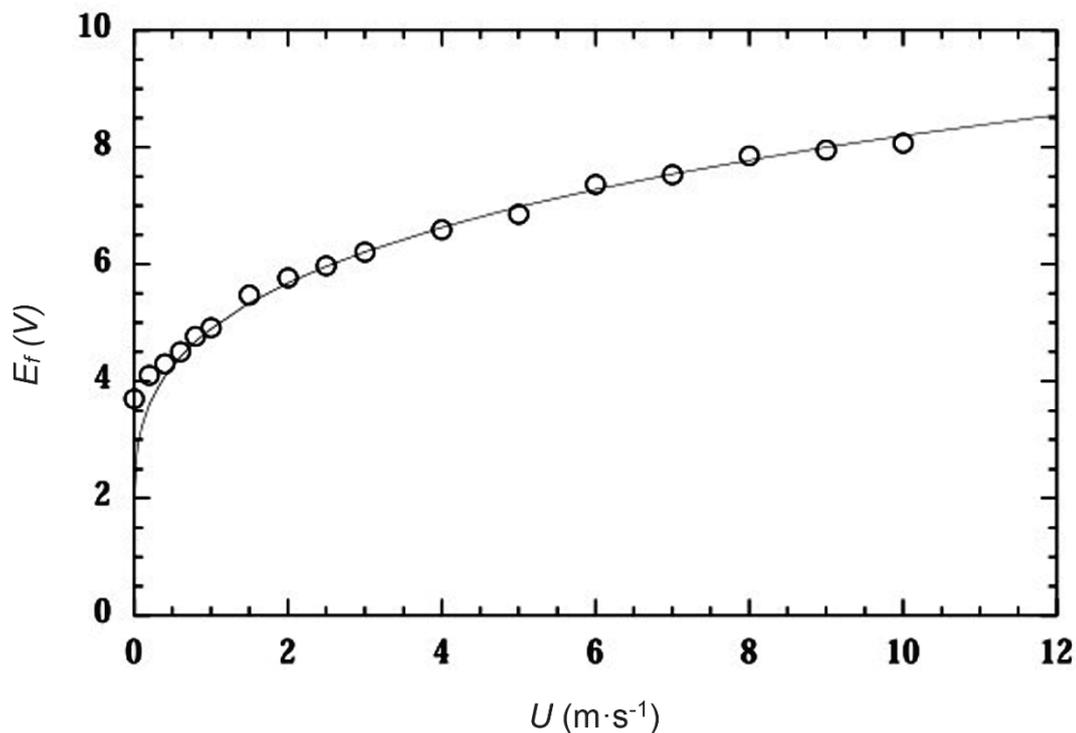
$$\frac{R_f I^2}{R_f - R_0} = K(a_0 + b_0 \sqrt{U})$$

dans laquelle  $K$  est à exprimer en fonction de  $\gamma$ ,  $\ell$ ,  $d$  et  $R_0$ .

**Q15.** L'anémomètre à fil chaud est utilisé en maintenant la température  $T_f$  constante. Pour permettre cela, un système de rétroaction adapte l'intensité dans le fil en fonction des variations de vitesse de l'écoulement. Comment doit varier l'intensité lorsque la vitesse de l'écoulement augmente ? Justifier brièvement.

**Q16.** On mesure la tension  $E_f$  aux bornes du fil (en convention récepteur). Établir la relation entre  $E_f$  et  $U$ , en fonction de  $R_f$ ,  $R_0$ ,  $K$ ,  $a_0$  et  $b_0$ .

**Q17.** Les paramètres  $K$ ,  $a_0$  et  $b_0$  n'étant pas connus précisément, il est nécessaire de réaliser un étalonnage de l'anémomètre à fil chaud. Un exemple de courbe d'étalonnage est donné sur la **figure 4**. Expliquer pourquoi les mesures de vitesse réalisées avec cet anémomètre seront moins précises à grande vitesse qu'à petite vitesse.



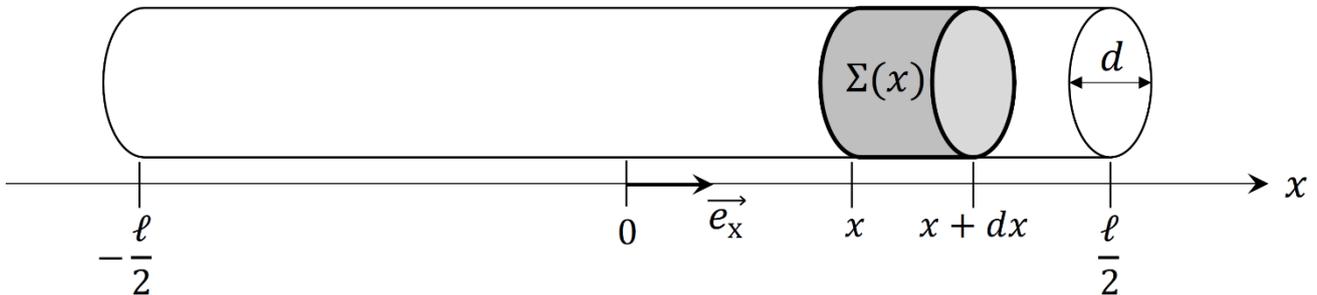
**Figure 4** - Courbe d'étalonnage d'un anémomètre à fil chaud

**Problème 1.B. : Suite de l'extrait CCINP 2022**

Dans le modèle de la **sous-partie II.1**, on a supposé que la température du fil était uniforme sur toute la longueur du fil. Le but de cette sous-partie est de voir à quelle condition une telle hypothèse est acceptable. On considère donc maintenant que la température du fil en régime stationnaire est une fonction de la position  $x$  dans le fil (avec  $-\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ ), qu'on note  $T_f(x)$ . Pour déterminer ce profil de température, on va effectuer un bilan énergétique sur une portion élémentaire de fil  $\Sigma(x)$  comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (**figure 6**). Les transferts thermiques pris en compte sur cette portion élémentaire de fil seront :

- la conduction thermique au sein du fil ;
- la convection forcée entre le fil et l'air environnant : le transfert thermique cédé par  $\Sigma(x)$  à l'air pendant la durée élémentaire  $dt$  a pour expression  $\delta Q_{\text{conv}} = h(T_f(x) - T_0) dS_{\text{lat}} dt$ , où  $dS_{\text{lat}}$  désigne la surface latérale élémentaire de  $\Sigma(x)$  en contact avec l'air.

Tous les autres transferts thermiques sont négligés.



**Figure 6** - Portion élémentaire de fil comprise entre  $x$  et  $x + dx$

**Q23.** On note  $\lambda_f$  la conductivité thermique du fil. Exprimer le transfert thermique  $\delta Q_{\text{cond}}$  algébriquement reçu par conduction par  $\Sigma(x)$  pendant la durée élémentaire  $dt$ .

**Q24.** La résistance élémentaire de  $\Sigma(x)$  est  $dR = \frac{R_0}{\ell} (1 + \gamma(T_f(x) - T_0)) dx$ . Le fil étant traversé par un courant  $I$ , exprimer le travail électrique  $\delta W_e$  reçu pendant  $dt$  par  $\Sigma(x)$ .

**Q25.** En utilisant l'hypothèse de régime stationnaire, montrer que :

$$\frac{d^2 \theta_f}{dx^2} - K_1 \theta_f = K_2$$

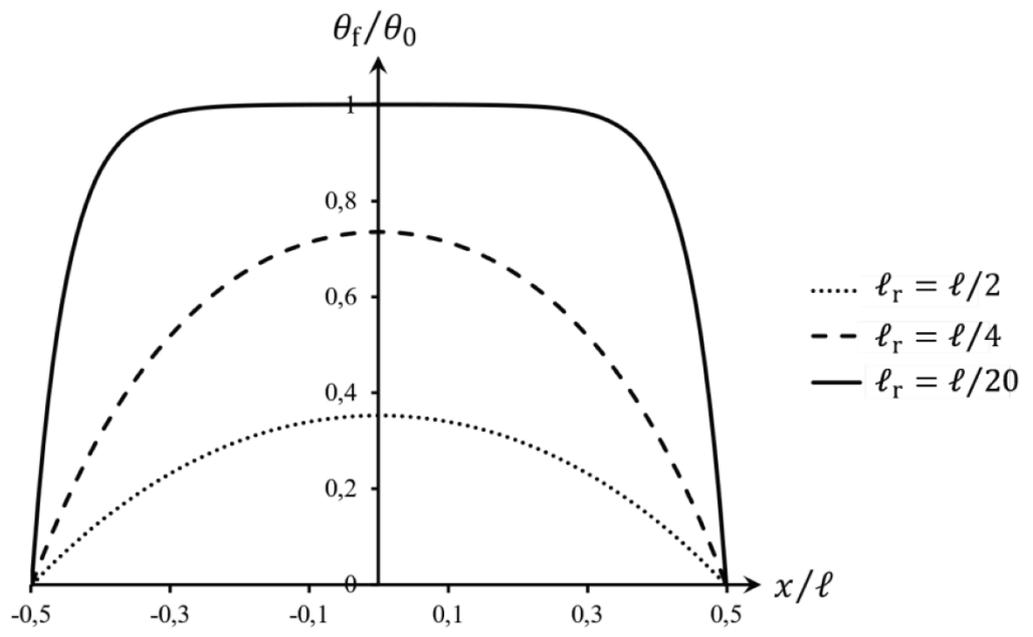
avec  $\theta_f(x) = T_f(x) - T_0$ , et  $K_1$  et  $K_2$  deux constantes à exprimer en fonction de  $\ell$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $\lambda_f$ ,  $\gamma$ ,  $R_0$  et  $I$ .

**Q26.** On admet que  $K_1 > 0$  et on pose  $\ell_r = \frac{1}{\sqrt{K_1}}$ . En considérant que les températures aux deux extrémités du fil sont égales à  $T_0$ , montrer que :

$$\theta_f(x) = \theta_0 \left( 1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{x}{\ell_r}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{2\ell_r}\right)} \right)$$

où  $\theta_0$  sera exprimée en fonction de  $K_2$  et  $\ell_r$ .

**Q27.** À partir de la **figure 7**, déterminer comment choisir  $\ell_r$  pour avoir une température quasi-uniforme sur l'ensemble du fil.  $\ell_r$  est la "longueur de refroidissement" : donner un sens physique qualitatif à ce terme.



**Figure 7** - Représentation de  $\theta_f/\theta_0$  le long du fil pour plusieurs valeurs de  $\ell_r$

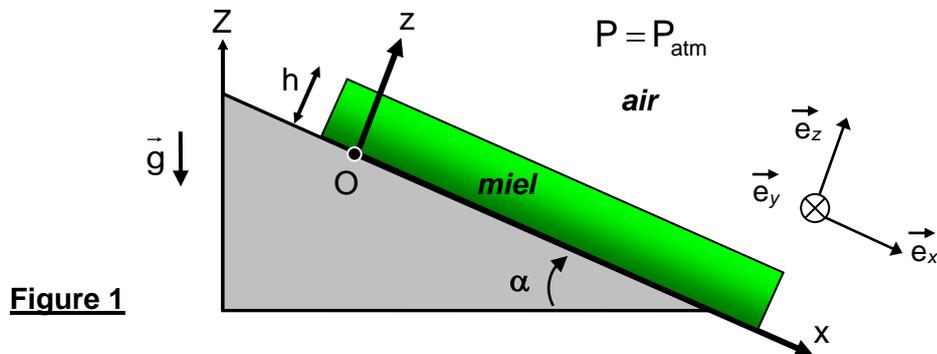
## Problème 2 : Mécanique des fluides (extrait concours E3A)

### A / ETUDE PRELIMINAIRE (ÉCOULEMENT D'UNE COUCHE DE MIEL)

En préambule à l'étude d'un glacier, intéressons nous à l'écoulement d'un fluide visqueux, par exemple une couche de miel, sur une plaque plane inclinée.

Une couche d'épaisseur constante  $h$ , d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ , s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport  $\nu = \eta / \rho$ .



**Figure 1**

Le support plan incliné a pour équation  $z = 0$  et la surface libre correspond à  $z = h$ . Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air-miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions  $Ox$  et  $Oy$  sont très supérieures à l'épaisseur  $h$  de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

- A1.** Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.
- A2.** Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ de vitesses s'écrit sous la forme :  $\vec{v}(M) = v(z) \vec{e}_x$ .
- A3.** Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES :  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overline{\text{grad} P} + \rho \vec{g} + \eta \overline{\Delta \vec{v}}$ . ( $D$  désigne la dérivée particulaire)
- A4.** Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .  
En déduire les expressions des composantes du vecteur  $\overline{\text{grad} P}$  sur cette base.
- A5.** Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit  $P = P(z)$ , puis l'exprimer.
- A6.** Etablir l'équation différentielle  $\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + k \sin \alpha = 0$  vérifiée par la vitesse  $v(z)$  et identifier  $k$ .

A la surface libre, sur le plan d'équation  $z = h$ , la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.

- A7.** Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse  $v$ , en  $z = 0$  et à sa dérivée  $\frac{dv(z)}{dz}$ , en  $z = h$ .
- A8.** Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse  $v_{MAX}$ . Calculer  $v_{MAX}$  sachant que  $h = 3,0 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et que, pour le miel,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 10,0 \text{ Pa.s}$ .

**A9.** Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur  $W$  (selon  $Oy$ ) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur  $h$ .

**A10.** Exprimer le débit volumique  $Q_V$  du miel. En déduire la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  de l'écoulement et l'exprimer en fonction de  $v_{MAX}$ .

## **B / DYNAMIQUE D'UN GLACIER**

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (Figure 2). La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne  $a$  et une épaisseur moyenne  $h$ , avec  $a = 2h$ .

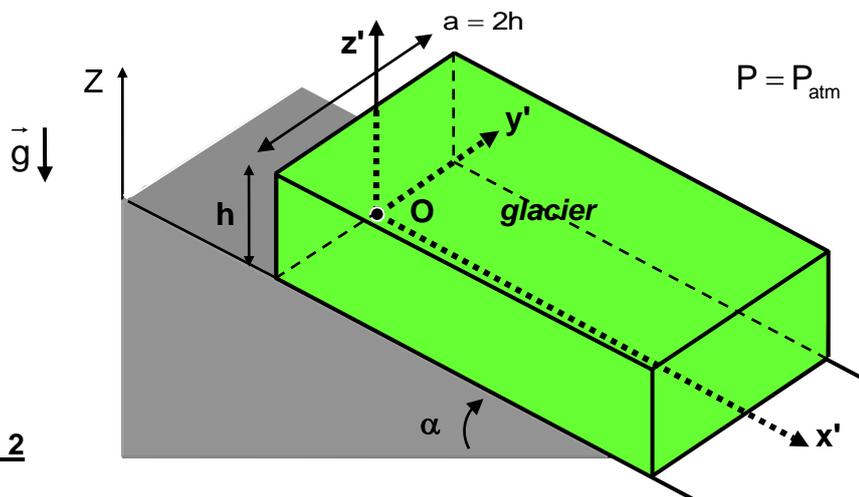
Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit :  $\vec{v}(M) = v(y, z) \vec{e}_x$ .

**B1.** Etablir, à partir des résultats obtenus dans l'étude préliminaire, l'équation différentielle décrivant l'écoulement du glacier en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants :  $y = y' a$ ,  $z = z' a$ . Les grandeurs  $y'$  et  $z'$  sont adimensionnées.

**B2.** Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique  $v_0$ , et en posant  $v = v' v_0$ , de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en

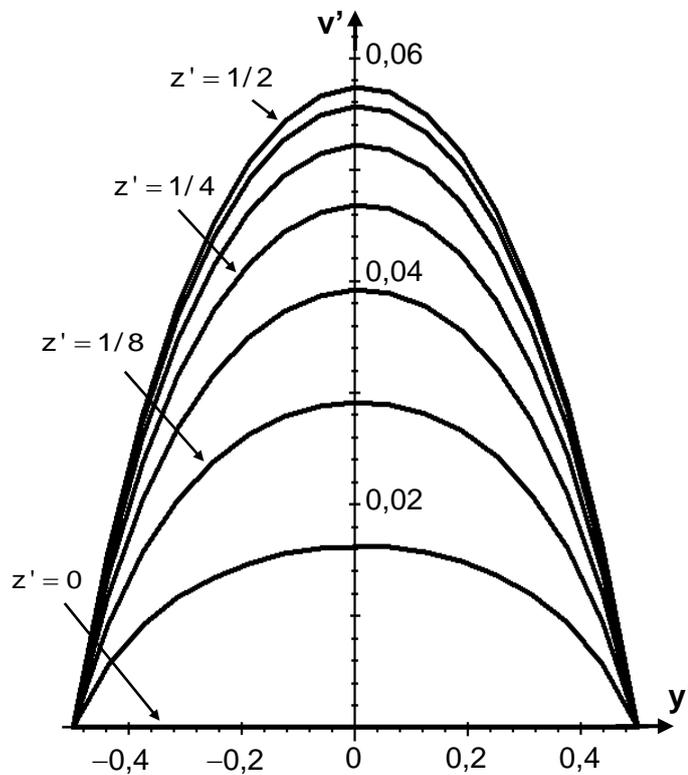
$$v'(y', z'), \text{ pouvant s'écrire : } \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0. \text{ Expliciter } v_0.$$



**Figure 2**

**B3.** Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution  $v'(y', z')$ , en  $z' = 0$  et  $y' = \pm 1/2$ , puis par sa dérivée  $\frac{dv'}{dz'}$ , en  $z' = 1/2$ .

La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de  $v'$  en fonction de  $y'$  (Figure 3) pour différentes valeurs du paramètre  $z'$  (compris entre 0 et 1/2).



**Figure 3**

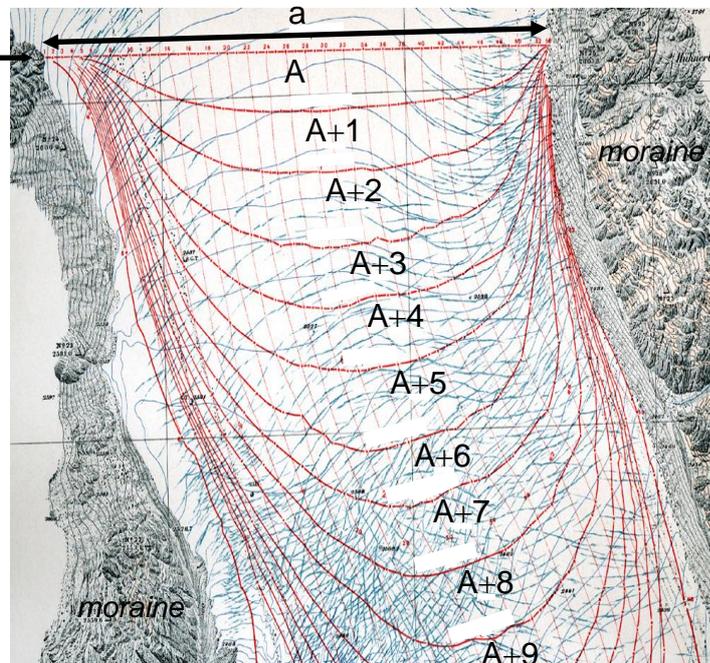
- B4.** Evaluer la valeur maximale  $v'_{\text{MAX}}$  atteinte par la vitesse adimensionnée  $v'$  à la surface supérieure du glacier.
- B5.** Combiner ce tracé avec celui réalisé en question **A9**, dans le plan  $Oxz$  afin de représenter, en vue perspective, l'écoulement du glacier en trois dimensions.

*De tout temps, les glaciologues ont tenté d'évaluer la déformation des glaciers et leur écoulement (autrefois à l'aide de pierres posées sur le glacier, plus récemment à l'aide de balises GPS et par interférométrie radar, comme étudié en seconde partie).*

*Etablie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la **figure 4** présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées  $A, A+1, \dots, A+9$ ). A l'instant de référence (année  $A$ ), les balises sont alignées sur la largeur  $a$  du glacier, entre deux moraines latérales.*

- B6.** Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en  $\text{m.an}^{-1}$ , puis en  $\text{m.s}^{-1}$ .  
En déduire la valeur de la vitesse caractéristique  $v_0$ .
- B7.** Déterminer, puis calculer, la viscosité cinématique de la glace. Commenter.

alignement des balises  
(année A de référence)



**Figure 4**

*Écoulement du glacier du Rhône*

Données :  $a = 2h = 800 \text{ m}$ , angle moyen  $\alpha = 14^\circ$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .