Chap.3 – Induction : cas d'un circuit *fixe* dans un champ *variable*

Intro : En faisant osciller un aimant à travers une bobine reliée à une résistance, on observe un courant induit dans le circuit (il n'y a pourtant pas de générateur). Les variations du champ magnétique à l'intérieur de la bobine *induisent* une *force électromotrice* qui met en mouvement les porteurs de charge : c'est le ***phénomène d'induction***.

1. Circulation du champ électrique – Loi de Faraday

1.1. Le champ électrique *n'est pas* à circulation conservative – Force électromotrice

Le champ électrique n'est pas un champ de gradient en régime variable.

Définition du champ électromoteur

$$\overrightarrow{E_m} \overset{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Définition fém

$$e_{AB} \overset{\text{def}}{=} \int_A^B \overrightarrow{E_m} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

(en volts)

Si l'on ne connaît pas le potentiel vecteur, on ne peut pas utiliser cette définition pour calculer la fém induite !

1.2. Loi de Faraday (circuit filiforme fermé)

On considère un circuit filiforme fermé, ou dont l'ouverture est très étroite devant la longueur du circuit.

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$ est le flux du champ magnétique à travers le circuit

- Démontrer cette loi à partir de l'équation de M-F.

1.3. Schéma équivalent d'un conducteur filiforme en présence d'induction

Relation ddp-courant aux bornes d'un conducteur ohmique en présence $\vec{B}$ variable

En présence d'un champ magnétique variable, la relation entre la ddp u_{AB} et le courant i_{AB} est modifiée aux bornes A et B d'un conducteur ohmique :

$$u_{AB} = R_{AB} i_{AB} - e_{AB}$$

On remarque donc qu'un conducteur soumis à l'induction peut être simplement modélisé par la mise en série d'une résistance et d'une source idéale de tension orientée en convention générateur.

Schéma équivalent d'un conducteur ohmique en présence de $\vec{B}$ variable

Pour retrouver la relation ci-dessus, il suffit de se rappeler du schéma équivalent à un conducteur ohmique :
sa résistance R_{AB} est en série avec la fém e_{AB} orientée en convention générateur.
(Il est donc essentiel d'orienter d'abord le courant dans le circuit avant de dessiner la fém)

Remarque : Si la portion du circuit comprise entre A et B est assimilable à un circuit fermé (ouverture très petite devant la longueur du circuit), on calcule la fém e_{AB} grâce à la loi de Faraday (cas au programme).

Remarque : Sinon, il faut utiliser le champ électromoteur (avec potentiel vecteur), hors programme a priori.

1.4. Exemple : spire circulaire fixe en présence d'un champ magnétique variable

Soit une spire circulaire de rayon *a*, horizontale, plongée dans un champ magnétique vertical, *uniforme* et *variable dans le temps* :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_z}$$

- Déterminer la fém induite dans la spire.
- La résistance totale de la spire vaut R. En vous appuyant sur un schéma électrique équivalent de la spire, en déduire l'intensité du courant induit dans la spire.
- En plaçant un ampèremètre sur la spire, expliquer comment utiliser ce dispositif pour mesurer le champ magnétique environnant. L'utilisation d'un bobinage (N spires) permet-il d'optimiser le dispositif ?

1.5. Loi de Lenz (loi de modération)

- Dans l'exemple précédent, déterminer qualitativement la direction et le sens du champ magnétique créé par le courant circulant dans la spire. Que remarque-t-on ?

Cette propriété est générale, on parle de loi de modération.

Loi de Lenz

Les conséquences de l'induction tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Remarque : Cette loi de modération permet de comprendre qualitativement l'effet de peau, vu dans le chapitre précédent. Un champ électrique variable appliqué à un conducteur (par un GBF par exemple), crée un courant qui crée un champ magnétique variable, qui en retour crée un courant induit qui s'oppose au courant initial… Les bords du conducteur sont moins soumis à ce courant induit, car ils sont en contact avec l'extérieur, où ne circule pas de courant. C'est pourquoi au final le courant tend à s'annuler au centre, et persiste sur les bords.

1.6. Courants de Foucault

C'est le nom donnés aux courants induits dans un conducteur volumique (i.e. non-assimilable à un fil). Quelques applications des courants de Foucault :
- plaques à induction (cuisinières)
- freinage poids lourds

2. Auto-induction – Induction mutuelle (cadre ARQS)

Tout ce qui concerne l'auto-induction et l'induction mutuelle sera étudié dans le cadre de l'ARQS.

2.1. Auto-induction : coefficient d'inductance propre

Un circuit traversé par un courant variable crée à travers lui même un champ magnétique 'propre'. Dans le cadre de l'ARQS, le flux de ce champ est proportionnel à $i(t)$ et est appelé flux propre Φ_p (cf. loi de Biot et Savart) ; on parle alors d'auto-induction.

Définition de l'inductance propre

$$\boldsymbol{L \overset{\text{def}}{=} \frac{\Phi_p}{i}}$$

c'est le coefficient d'auto-inductance du circuit (en Henry H)

Propriété : L est toujours positif et ne dépend que de la géométrie du circuit.

La loi d'Ohm s'écrit alors : V(A) - V(B) = $R_{AB}I$ + LdI/dt. Cela démontre la relation admise depuis le lycée.

Exemple : solénoïde de longueur l section S N spires, assimilé à un solénoïde infini : $L = \mu_0 N^2 S/l$.

2.2. Mutuelle inductance : coefficients d'inductance mutuelle

Soient deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Le champ magnétique généré par C_1 crée dans C_2 un flux $\Phi_{1\to2}$, proportionnel à $i_1(t)$ dans le cadre de l'ARQS.
Le champ magnétique généré par C_2 crée dans C_1 un flux $\Phi_{2\to1}$, proportionnel à $i_2(t)$ dans le cadre de l'ARQS.

Définition des deux coefficients d'inductance mutuelle

$$\boldsymbol{M_{1\to2} \overset{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{1\to2}}{i_1}}$$
$$\boldsymbol{M_{2\to1} \overset{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{2\to1}}{i_2}}$$

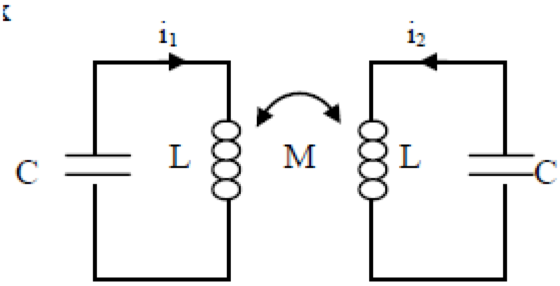
unité Henry (H)

Ces deux coefficients ne dépendent que de la géométrie de chaque circuit et de leur disposition relative l'un par rapport à l'autre. Ils sont algébriques (comme les flux), leur signe dépend de l'orientation arbitraire des surfaces délimitées par chacun des circuits.

Propriété *(admise)*

$$M_{1\to 2} = M_{2\to 1}$$

- En tenant compte des inductances propres et des inductances mutuelles, exprimer le flux magnétique total Φ_1 à travers le circuit C_1 en fonction de i_1 et i_2. Idem pour le flux magnétique dans C_2.



Exemple : Circuits couplés par mutuelle, deux bobines face-à-face

On considère les circuits ci-contre dans lequel les deux bobines et les deux condensateurs sont identiques ; les deux circuits sont dits couplés par leur coefficient d'inductance mutuelle M.

Déterminer les équations différentielles vérifiées par $i_1$et i_2.

2.3. Energie magnétique stockée par un circuit isolé

On considère l'établissement du courant dans un circuit isolé de toute influence magnétique extérieure.
La résistance totale du circuit est R et son inductance propre L. Ce circuit est relié à une source idéale de tension $E_1(t)$.

- Dessiner un schéma équivalent de ce circuit (modéliser l'induction par une fém)
- Par un bilan d'énergie, déterminer l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée par le circuit.

Compatibilité avec l'énergie magnétique volumique

Vérifions que cette expression est compatible avec celle issue directement des équations de Maxwell et dont l'expression a été admise lors de l'énoncé de l'équation locale de Poynting.

- Dans le cas d'un solénoïde (supposé infiniment long pour établir l'expression du champ), exprimer l'énergie magnétique stockée avec les deux formules, et vérifier la compatibilité des résultats.

Ce résultats est général, quelque soit la géométrie du circuit (pas uniquement solénoïde). Il permet de démontrer que l'inductance propre est une grandeur nécessairement positive.

$$E_{mag} = \frac{1}{2}Li^2$$

2.4. Energie magnétique stockée par un ensemble de deux circuits couplés par mutuelle

On considère l'établissement du courant dans deux circuits C_1 e C_2 couplés par mutuelle inductance.
On tient aussi compte des inductances propres de chaque circuit. Le premier circuit est alimenté par une source idéale de tension $E_1(t)$, et le deuxième par une autre source $E_2(t)$.

- Dessiner un schéma équivalent des deux circuits (modéliser l'induction par une fém).
- Par deux bilans de puissance incluant les deux circuits, établir l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée par l'ensemble des deux circuits.

$$E_{mag} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

Par ailleurs :

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Egalité lorsque le couplage est parfait : toutes les lignes de champ créées par un circuit traversent le 2e

On peut le démontrer en invoquant que l'énergie magnétique E_{mag} est nécessairement positive (cf. expression issue de l'équation locale de Poynting). Ecrire que $E_{mag} = i_2^2\left(\frac{1}{2}L_1x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2\right)$, et trinôme sans solution donc discriminant négatif.

Notions clefs

Savoirs :

- Loi Faraday + modélisation électrocinétique associée (fém en ***convention générateur !!***)
- Définitions coefficients inductance propre et mutuelle
- Expressions énergie magnétique (deux cas)

Savoirs faire :

- Refaire les démonstrations du cours
- Utiliser Faraday pour étudier les effets de l'induction sur les circuits électriques