Exercices – Dispersion et Absorption – Autres types d'onde

Exercice 1 : Ondes thermiques
Analogue thermique de l'effet de peau électromagnétique

C'est une situation tout-à-fait similaire à celle de la propagation d'une OEM dans un conducteur à basse fréquence, étudiée dans le cours. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le sol, la température à la surface variant de manière sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_0. On oriente l'axe $\overrightarrow{u_z}$ verticalement vers le haut.

1. Rappeler l'équation de la diffusion thermique dans le sol

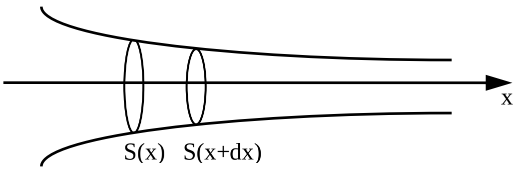
On choisit une solution OPPH (à vecteur d'onde complexe) oscillant autour de la même valeur moyenne T_0 :

$$\underline{T}(z,t) = T_0 + \theta_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$$

2. Etablir la relation de dispersion des ondes thermiques. Introduire une longueur caractéristique δ.
3. Donner l'expression mathématique de la température $T(z,t)$ en tout point du sol

4. Evaluer numériquement δ, l'épaisseur caractéristique d'évolution de la température dans le sol :
- pour une période de l'excitation égale à 24h (cycles jour/nuit)
- pour une période de l'excitation égale à 1 an (cycle annuel)

5. Evaluer numériquement le décalage temporel entre les maxima de température à la surface et à $z = -\delta$. A quelle profondeur l'onde est-elle en opposition de phase avec l'excitation ? A cette profondeur, quelle est l'amplitude de l'onde thermique ?



Exercice 2 : Cornet acoustique
Une amplification d'origine géométrique, mais un filtrage PHaut

Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe Ox et de section variable $S(x) = S_0\exp(-\sigma x)$ où S_0 et σ sont des constantes.
On se place dans l'approximation acoustique : $P_{tot} = P_0 + p$ et $\mu_{tot} = \rho_0 + \mu$.
L'écoulement est supposé unidirectionnel : $\vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$.

On admet dans un premier temps que l'équation d'onde s'écrit : $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \sigma\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

1. Etablir la relation de dispersion pour une (pseudo) OPPH : $\underline{k}^2 - \omega^2/c^2 - j\underline{k}\sigma = 0$.
Discuter de la nature des ondes selon la valeur de ω et vérifier l'effet amplificateur du cornet.

On cherche ci-dessous (facultatif) à démontrer l'équation d'onde.
2. En appliquant la loi de conservation de la masse au système ouvert compris entre x et x+dx au repos, établir que :

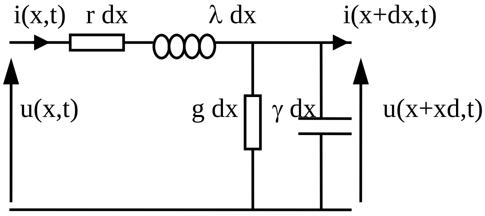
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} - \rho_0 \sigma v = 0$$

3. La RFD et l'équation liant p à μ n'étant pas modifiées (utiliser leur version linéarisée, cf. cours), établir l'équation d'onde.

***Réponse** 1. : pour $\omega > \omega_c = \sigma c/2$, $\mathrm{k} = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}} + j\dfrac{\sigma}{2}$; l'onde est dispersive et amplifiée ; pour $\omega < \omega_c$, $\underline{k}$ est imaginaire pur ; ondes évanescentes*

Exercice 3 : câble coaxial avec pertes

Prise en compte des résistances dans l'étude du câble coaxial



On étudie la propagation d'une onde électrique à l'intérieur d'un câble coaxial, en tenant compte de la résistance de l'âme et de la gaine ($r\,dx$), ainsi que de la fuite de courant à travers l'isolant (***conductance*** gdx).

1. Pourquoi modélise-t-on le phénomène sur une tranche élémentaire de câble ?
2. Déterminer les équations de couplage des champs $u(x,t)$ et $i(x,t)$
3. En déduire l'équation d'onde le champ $u(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (g\lambda + r\gamma)\frac{\partial u}{\partial t} - rg\,u = 0$$

4. Le phénomène de propagation est-il réversible ?

5. Etablir la relation de dispersion
6. Dans le cas particulier où $\frac{r}{\lambda} = \frac{g}{\gamma}$, exprimer $\underline{k}^2$ en fonction de ω, c^2 et $j\frac{r}{\lambda}$
7. En déduire les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde
8. En déduire la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ? absorbant ?

Exercice 4 : Démonstration de l'effet de peau sans passer par l'équation d'onde

Etude effet de peau seulement avec Maxwell en complexe

On cherche à propager un champ de pulsation ω s'écrivant sous forme complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x)$$

dans un conducteur de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1} occupant le demi-espace x > 0.
On rappelle que tant que $f \ll 10^{14} Hz$, on a ρ = 0.

1. Rappeler les équations de Maxwell et la relation liant $\vec{j}$ et $\vec{E}$ dans le conducteur.
2. En déduire que la relation de dispersion dans le conducteur s'écrit :

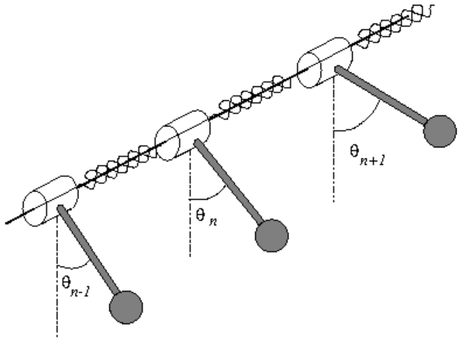
$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\,\mu_0\gamma\omega$$

3. Montrer que dans un bon conducteur (cuivre) et aux fréquences usuelles l'un des deux termes est négligeable devant l'autre. Que vaut alors k ?
4. En déduire l'expression de E sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right).\cos(\omega t - k'x)$$

où δ est appelé profondeur de peau du conducteur, et k' partie réelle de k.
5. Calculer δ pour f = 100 MHz puis f = 10^{13} Hz.

Exercice 5 : Chaîne d'oscillateurs
- *Un exemple mécanique d'équation d'onde ≠ d'Alembert*
- *Modélise simplement la propagation d'une onde de torsion dans un solide*



On considère une chaîne de pendules couplés par un fil de torsion de constante *K*. Les pendules sont des barres homogènes toutes identiques, de longueur *l* et de masse *m*. Les pendules sont distants les uns des autres d'une distance *d*. Le mouvement du pendule situé à la position *x* est repéré par l'angle $\theta(x,t)$. Chaque pendule est soumis à une force de frottement fluide, de coefficient *f*.
Dans l'approximation des milieux continus, et des petits mouvements, on peut montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x,t)$ est la suivante (à faire en bonus) :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Kd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

1. En considérant des solutions de type « pseudo-OPPH » (i.e. avec un vecteur d'onde complexe), établir la relation de dispersion de ces ondes.
2. Interpréter physiquement le résultat, en notant *k'* et *k''* respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de *k*. Le milieu est-il absorbant ?
3. Que deviennent ces résultats si l'on néglige l'effet des frottements fluides (on distinguera deux cas) ? Calculer si possible les vitesses de phase et de groupe. Que représentent physiquement ces deux vitesses ?
4. Etablir l'expression mathématique en notation réelle de $\theta(x,t)$ <u>à haute fréquence</u> (on pourra faire un DL au premier ordre en w pour déterminer le vecteur d'onde). Discuter du résultat.

Exercice 6 : Influence de la viscosité de l'air sur les ondes sonores (CCP PSI 2003)
La prise en compte des frottements donnent une équation d'onde ≠ d'Alembert pour onde sonore

On se propose de prendre en compte la viscosité dans l'étude de la propagation des ondes acoustiques ; on rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit $d\vec{F}/dV = \eta\Delta\vec{v}$.
On considère une onde plane de la forme $\vec{v} = v(x,t).\vec{u}_x$.
a) Etablir que l'équation de propagation de v(x,t) et de p(x,t) est, dans l'approximation acoustique :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\,\partial t}$$

dans laquelle c et β sont des constantes à définir.
b) On cherche pour la surpression complexe une solution de la forme $\underline{p}(x,t) = p_0\exp(j(\omega t-\underline{k}x))$ avec $\underline{k}$ complexe : $\underline{k} = k_1 - jk_2$ (k_1 et k_2 réels positifs). En déduire la relation de dispersion d'une OPPH.
c) Pour l'air on donne : $\beta = 10^{-5}$ SI et c = 340 m.s^{-1}. Calculer l'ordre de grandeur de $\beta\omega/c^2$ (pour une fréquence des ondes inférieure à $10^5 Hz$) et en déduire une expression approchée de $\underline{k}$ (*on s'autorise un DL en complexe*), puis de k_1 et k_2.
d) Donner l'expression réelle p(x,t) de la surpression.
e) Exprimer la vitesse de phase. Dispersion ? Sur quelle distance caractéristique l'onde est-elle absorbée ?
f) Si l'on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquence est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

Exercice 7 : Influence d'un frottement fluide sur la vibration d'une corde
Idem mais pour corde vibrante

On considère une corde de masse linéique μ et soumise à une tension au repos T_0.
Un élément de corde est soumis à une force de frottement fluide : $d\vec{f} = -\mu dx\frac{1}{\tau}\frac{\partial y}{\partial t}\vec{u}_y$
a) Montrer que l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

b) Quelle est la relation de dispersion ?
c) Quelle est la vitesse de phase ? Le milieu est-il dispersif ? absorbant ? Quelle est la vitesse de groupe ?

<u>Exercice 8 : Ondes de surface dans un bassin</u>
Etudier les ondes à la surface de l'eau

On étudie la propagation d'ondes unidimensionnelles de faible amplitude dans un bassin de longueur infinie selon Oy et de largeur L selon Ox, dont le fond est confondu avec le plan z = 0.

Au repos, la surface libre est horizontale à la cote z = h ; en présence de l'onde elle vaut $h + \xi(x, t)$, avec $\xi \ll h$.

Le champ des vitesse s'écrit $\vec{v}(x,t) = v_x(x,t)\overrightarrow{u_x} + v_z(x,t)\overrightarrow{u_z}$, l'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\overrightarrow{u_z}$
Les grandeurs $v_x(x,t)$, $v_z(x,t)$ et $\xi(x, t)$ sont des infiniment petits d'ordre 1.

a) En faisant un bilan de masse sur le système ouvert et fixe constitué de la colonne d'eau comprise entre les abscisses x et x+dx (et de largeur ℓ selon $\overrightarrow{u_y}$), établir la relation :
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

b) En appliquant Bernoulli PSHII (justifier le caractère approximativement irrotationnel), et en ne gardant que les termes d'ordre un, déterminer la pression p(x,z,t) à l'altitude z en fonction de $\xi(x, t)$, z, h, ρ, g et P_0.

c) En déduire, grâce à la RFD dans laquelle on négligera tous les termes d'ordre supérieur à 1, la relation :
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

d) En déduire l'équation de propagation dont est solution $v_x(x,t)$ et la célérité c des ondes correspondantes.
e) Quelle est la fréquence du mode fondamental d'une baignoire de largeur L = 1 m pour une hauteur d'eau h = 0,5 m ?
f) Par ailleurs, et en supposant que l'expression de la célérité reste vraie même lorsque $\xi \ll h$ n'est plus vérifiée (donc c n'a pas la même valeur en tout point de la vague, expliquer le déferlement des vagues à leur arrivée sur une plage.

<u>Exercice 9 : Sillage d'un bateau</u> (Centrale PSI 2007)
Retrouver la valeur de l'angle formé par le sillage d'un bateau (ou de ~tout objet avançant sur l'eau)

a) Montrer que l'on peut trouver une relation de dispersion $\omega = f(k)$ telle que les vitesses de groupe et de phase sont reliées par la relation simple $v_g = \eta . v_\varphi$, où η est une constante.
b) Pour un bateau naviguant sur un bassin suffisamment profond, on peut estimer que la propagation des ondes de surface sera indépendante de la profondeur. On cherche alors une relation de dispersion de la forme $\omega = a g^\alpha k^\beta$, où a est une constante sans dimension. Déterminer les exposants α et β.Dans la suite on prendra a =1.
c) Le bateau est assimilé à un point matériel B de masse m, en mouvement pratiquement rectiligne uniforme de vitesse v. Il émet vers l'avant un paquet d'ondes de pulsation moyenne ω et dont le vecteur d'onde **k** fait un angle θ avec la vitesse.
On admet que $\omega = k.v.\cos\theta$.
En déduire les vitesses de groupe et de phase en fonction de v et θ.
d) Montrer qu'à l'instant t les paquets d'onde émis antérieurement dans la direction θ sont répartis sur une demi-droite de sommet B faisant avec la vitesse du bateau un angle ϕ tel que $\tan\phi = \sin\theta\cos\theta/(\cos^2\theta-2)$ avec $\cos\phi<0$.
d) Etudier la fonction $\phi(\theta)$ et en déduire que le sillage est limité par deux demi-droites faisant un angle 2α.
e) Vérifier cette valeur sur la photo du catamaran ci-contre.