Mécaflu TD2 – Dynamique des fluides visqueux – Ecoulement dans conduites – Force de traînée

Exercice 1 : Ecoulement gravitaire (adapté de E3A PSI 2013)

- 3e façon classique de faire couler un fluide

- Se confronter à un énoncé de concours

Une couche d'épaisseur constante h, d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport $\nu = \eta/\rho$.

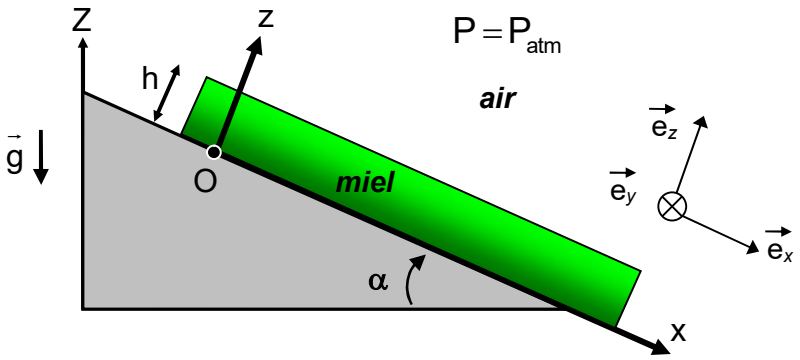


Figure 1

Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air–miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions Ox et Oy sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

A1. Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.

A2. Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ de vitesses s'écrit sous la forme : $\vec{v}(M) = v(z)\,\vec{e}_x$.

A3. Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES : $\rho \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\,\vec{g} + \eta\,\overrightarrow{\Delta v}$. *(D désigne la dérivée particulaire)*

A4. Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

En déduire les expressions des composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ sur cette base.

A5. Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit $P = P(z)$, puis l'exprimer.

A6. Etablir l'équation différentielle $\dfrac{d^2v(z)}{dz^2} + k\sin\alpha = 0$ vérifiée par la vitesse v(z) et identifier k.

A la surface libre, sur le plan d'équation $z = h$, la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.

A7. Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v, en $z = 0$ et à sa dérivée $\dfrac{dv(z)}{dz}$, en $z = h$.

A8. Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation : $v(z) = \beta\, z(2h - z)$. Identifier β.

Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse v_{MAX}. Calculer v_{MAX} sachant que $h = 3{,}0\ mm$, $\alpha = 10°$, $g = 10\ m.s^{-2}$ et que, pour le miel, $\rho = 1{,}4.10^{3}\ kg.m^{-3}$ et $\eta = 10{,}0\ Pa.s$.

A9. Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur W (selon Oy) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur h.

A10. Exprimer le débit volumique Q_V du miel. En déduire la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ de l'écoulement et l'exprimer en fonction de v_{MAX}.

A11. Exprimer le nombre de REYNOLDS, écrit comme le rapport de deux termes énergétiques qu'il conviendra de justifier. En déduire son expression littérale puis sa valeur numérique. Qualifier la nature de l'écoulement.

Exercice 2 : Equation de Navier-Stokes adimensionnée

S'entraîner à l'analyse dimensionnelle
Etablir Navier-Stokes adimensionnée et y faire apparaître le nombre de Reynolds
Vérifier alors que l'EDP est la même pour toute une classe d'écoulements (intérêt maquettes)

On considère un écoulement rectiligne de masse volumique ρ, de viscosité η, de vitesse caractéristique U_c , dont les champs varient sur une longueur caractéristique L_c. Seules les forces de pression et de viscosité sont prises en compte (on ne tient donc pas compte de la pesanteur). La coordonnée repérant la position d'un point est la coordonnée x.

1. Former à l'aide des grandeurs U_c, L_c et ρ un temps caractéristique τ_c et une pression caractéristique P_c

2. On définit les grandeurs adimensionnées $v^* = v/U_c$; $x^* = x/L_c$; $t^* = t/\tau_c$ et $P^* = P/P_c$
Montrer que l'on peut alors adimensionner tous les termes de l'équation de Navier-Stokes (opérateurs compris) en introduisant un facteur constant K :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v^*}}{\partial t^*} + (\overrightarrow{v^*} \cdot \overrightarrow{grad^*})\overrightarrow{v^*} = -\overrightarrow{grad^*}(P^*) + K\, \vec{\Delta}^*(\overrightarrow{v^*})$$

où K est une constante à définir. De quel unique facteur dépend la solution de l'équation ?

3. On étudie un avion de longueur L destiné à voler à vitesse U dans l'air. Une maquette de cet avion à l'échelle $1/10^{ème}$ est étudiée dans une soufflerie à air. Quelle doit être, en fonction de U, la vitesse de l'écoulement ?

4. Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Quelle vitesse doit avoir l'eau pour simuler la réalité ?

Données : $\eta_{air} = 210^{-5}$ Pl ; $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pl