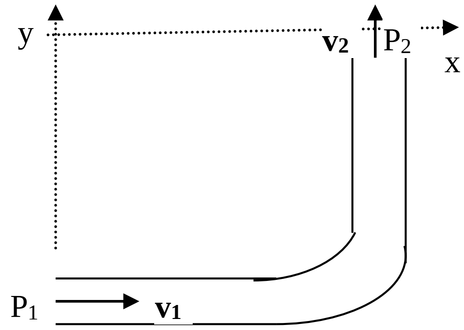
Exercices – Bilans macroscopiques : quantité de mouvement, énergie

Exercice 1 : Force subie par un coude de canalisation

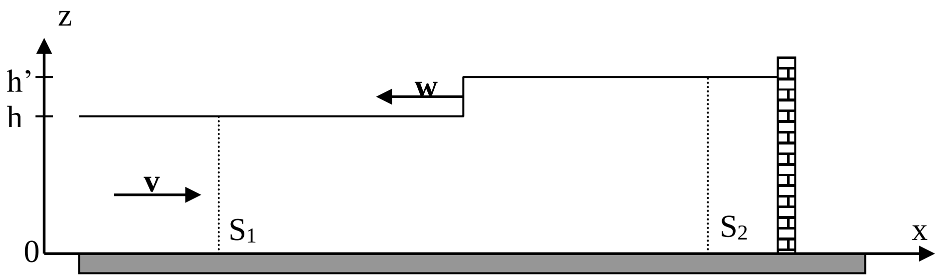


Soit un écoulement stationnaire de fluide parfait et incompressible dans une canalisation horizontale, cylindrique, de section S, présentant un coude d'angle droit.
Loin du coude en amont, la vitesse du fluide est V_1 uniforme et la pression P_1.
Loin du coude en aval, la vitesse du fluide est V_2 uniforme et la pression P_2.

a) Donner grâce à un bilan de masse une relation entre V_1 et V_2.
b) Trouver une relation entre P_1 et P_2.
c) Déterminer la force exercée par le fluide sur la canalisation en fonction de ρ, S_1, V_1 et P_1.

Exercice 2 : Ressaut hydraulique

Un canal de largeur L est obstrué par une paroi verticale (fermeture « brutale » d'une écluse). Une vague remonte alors le canal à une célérité w dans le référentiel terrestre.
La hauteur d'eau en amont du ressaut est h, et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est h' et la vitesse nulle. Les grandeurs h, h' et v sont constantes.
On se place dans le référentiel lié à la vague, supposé galiléen (car en TRU dans le référentiel terrestre). Dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire.
On étudie le système ouvert (S) de fluide délimité par les sections (en pointillés) amont S_1 et aval S_2, sections fixes dans le référentiel d'étude. Pour simplifier, on supposera que le front de la vague est vertical.



1. Quelle est la vitesse du fluide entrant dans (S) au niveau de S_1, et celle en ressortant au niveau de S_2 ?
2. En traduisant la conservation de la masse, établir une relation entre v, w, h et h'.
3. Définir un système fermé (S^*) approprié, et montrer que la variation de la composante horizontale de sa quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dP_x^*}{dt} = -\rho L h \times g(v,w)$$

où g(v,w) est une fonction à expliciter.
4. La pression étant P_0 à la surface du fluide, calculer la pression régnant dans l'eau en amont puis en aval du ressaut.
5. Que vaut la résultante *horizontale* des forces de pression sur le système (S^*) ? En déduire l'expression de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur (S) en fonction de ρ, g, L, h et h'.
6. En déduire alors que $h(v+w)v = \frac{1}{2}.g.f(h,h')$ où f(h,h') est une fonction à expliciter.
7. En déduire la célérité de la vague en fonctionde g, h et h'. Que vaut-elle si $h \approx h'$?

Exercice 3 : Perte de charge singulière due à un élargissement brutal de section

Eléments culturels

Une « perte de charge » est une perte d'énergie du fluide au cours de son écoulement. On rappelle qu'en mécanique des fluides, il y a trois stocks d'énergie (cf. termes de Bernoulli). Les pertes de charges sont une conséquence de la viscosité du fluide.

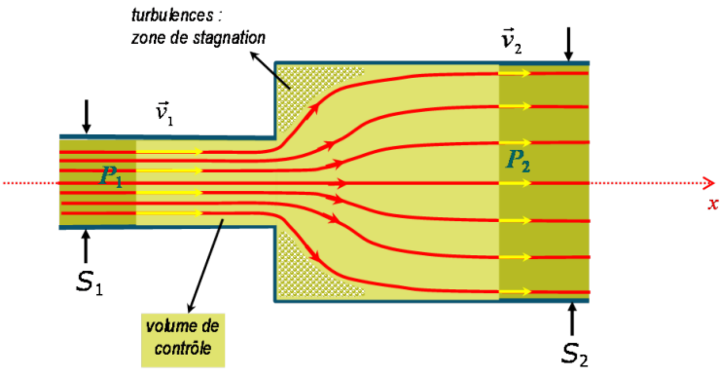
Dans l'écoulement de Poiseuille, la chute de pression est affine le long de la conduite, et cette perte de charge est alors qualifiée de « régulière », car elle se fait progressivement le long de l'écoulement.

Lorsqu'un « accident » survient en un point de l'écoulement (changement brutal de section d'une conduite, nœuds entre plusieurs conduites, arrivée d'une conduite dans un réservoir, etc.), il y a généralement perte de charge, et celles-ci sont qualifiées de « singulières », car dues à l'existence d'une « singularité » (changement brutal) sur le chemin de l'écoulement.

Calcul dans un cas particulier

Via quelques hypothèses simplificatrices, on va établir une expression approximative de la perte de charge singulière dans le cas d'un élargissement brutal de la section d'une conduite.

Le dessin ci-dessous illustre l'existence d'une « zone de stagnation » à l'intérieur de laquelle l'eau est quasiment immobile, et où l'on admettra que la pression vaut environ P_1 (i.e. la pression en amont)



❖ En effectuant un bilan de quantité de mouvement, déterminer l'expression de la perte de charge (déf > 0):

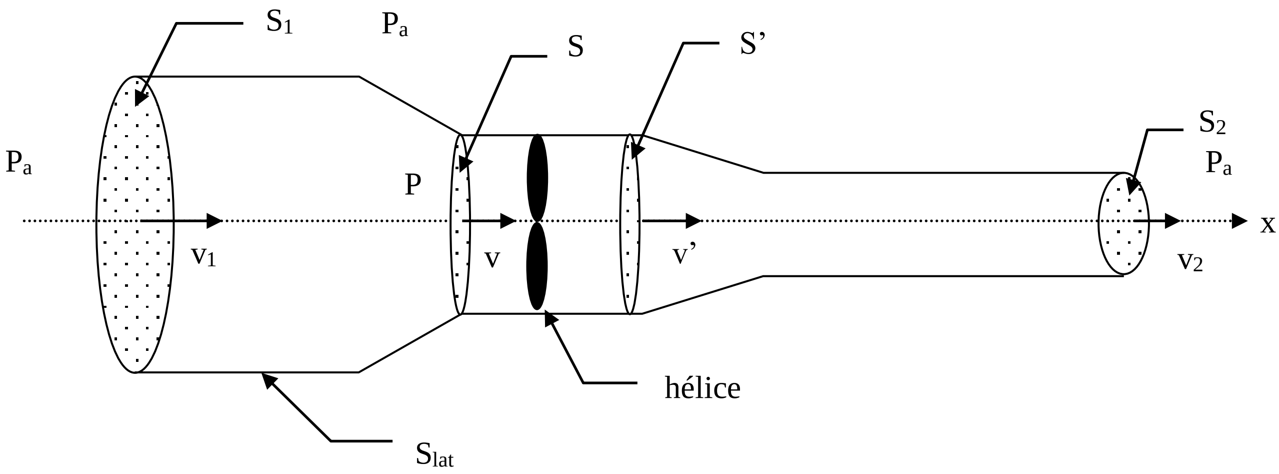
$$\Delta E_{vol} \stackrel{\text{def}}{=} \left(P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) - \left(P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right)$$

Tentative d'interprétation

Pourquoi le changement de section brutal provoque-t-il une perte de charge ?

La zone de stagnation favorise la dissipation d'énergie mécanique par viscosité, même dans un écoulement à grand nombre de Reynolds. Au niveau du changement de section, lorsqu'une turbulence dévie le fluide de sa trajectoire moyenne, de l'énergie mécanique est déviée vers la zone de stagnation et y reste piégée jusqu'à être dissipée.

Exercice 4 : Fonctionnement d'une hélice (cas inverse de l'éolienne)



Une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Ox est plongée dans un fluide parfait, incompressible de masse volumique µ. L'étude est faite dans un référentiel galiléen R lié à l'axe de l'hélice ; dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire. On négligera l'influence de la pesanteur.

On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de Ox et s'appuyant sur les pales de l'hélice. Ce tube de courant définit une surface fermée, constituée de la surface latérale du tube S_{lat} et des sections droites amont et aval S_1 et S_2. La pression à l'extérieur de ce tube de courant est uniforme et égale à la pression ambiante P_a.

Sur la surface S_1, la vitesse du fluide est uniforme et égale à $v_1\overrightarrow{u_x}$. Sur S_2, elle est égale à $v_2\overrightarrow{u_x}$.

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et S' d'aires sensiblement égales S ≈ S' :
- sur la surface S, la vitesse est $v\,\overrightarrow{u_x}$ et la pression P.
- sur la surface S', la vitesse est $v'\overrightarrow{u_x}$ et la pression P'.

Au voisinage proche de l'hélice, entre S et S', l'écoulement est perturbé, et il existe une discontinuité de la pression de part et d'autre de l'hélice.

1. Exprimer la pression P en fonction de P_a, µ, v_1 et v
Donner une expression analogue pour P' en fonction de P_a, µ, v_2 et v'.

On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide.

2. Montrer que $v \approx v'$.
En effectuant un bilan de quantité de mouvement dans le volume compris entre S et S', exprimer $\vec{F}$ en fonction de S, µ, v_1 et v_2.

3. En raisonnant cette fois dans le volume compris entre S_1 et S_2, obtenir une deuxième expression de $\vec{F}$ en fonction de v_1, v_2 et du débit massique $D_m = \mu S v$.

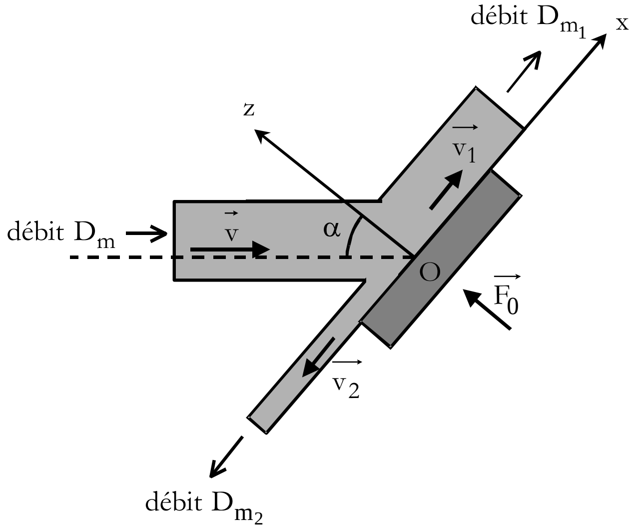
4. Déduire de ce qui précède, une relation simple entre v, v_1 et v_2.

5. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un volume de fluide bien choisi, déterminer la puissance $\mathscr{P}$ fournie par l'hélice au fluide, en donnant le résultat :
- dans un premier temps en fonction de D_m et des vitesses v_1 et v_2
- puis dans un second temps en fonction de $\vec{F}$ et $\vec{v}$

6. Vérifier le signe de $\mathscr{P}$ et justifier l'allure du tube de courant représenté en début d'énoncé.

7. Que faudrait-il modifier dans les raisonnements menés au cours de cet exercice si l'on étudiait une éolienne, plutôt qu'une hélice ?

Résolution de pb 5 : Jet d'eau sur une plaque



Un jet d'eau est envoyé sur une plaque avec une vitesse v, un débit massique D_m et un angle d'incidence α.
Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base orthonormale $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, $\vec{e_z}$ étant normal à la plaque et $\vec{e_x}$ dans le plan d'incidence, défini par $\vec{e_z}$ et la vitesse du jet incident.
Nous admettons les hypothèses suivantes :

- la viscosité de l'eau est négligée ; il n'y a donc aucune perte d'énergie mécanique ;
- après l'impact sur la plaque, la vitesse de l'eau reste tangente à celle-ci ;
- le jet incident se sépare en deux jets unidimensionnels, dont les vitesses sont dans le plan d'incidence.
- Le dispositif est vu « par-dessus », et l'on néglige la pesanteur

Déterminer (pas forcément dans l'ordre !) :

(a) les vitesses v_1 et v_2 des jets émergeants ;
(b) leurs débits massiques D_{m_1} et D_{m_2} ;
(c) la force de poussée, que nous pouvons définir comme opposée à la force supplémentaire $\vec{F_0}$ qui est appliquée pour maintenir la plaque immobile.

Exercice 6 : Onde de choc dans une canalisation

On considère une canalisation horizontale d'axe Ox, de section constante, dans laquelle circule un fluide compressible à vitesse uniforme $\vec{V}_1 = V_1.\vec{u}_x$.
On ferme brutalement une vanne en x=0, au bout de la canalisation. La couche de fluide située immédiatement contre la vanne est immobilisée, mais on constate que l'ensemble du fluide ne s'immobilise pas instantanément : l'écoulement se sépare en deux domaines séparés par un interface se déplaçant à célérité $\vec{C} = -C.\vec{u}_x$ (C constante positive) :

- l'un à droite de l'interface de caractéristiques $\vec{V}_2 = \vec{0}$, P_2, ρ_2 ;
- l'autre à gauche de caractéristiques $\vec{V}_1 = V_1.\vec{u}_x, P_1, \rho_1$.

Pression et masse volumique sont discontinues. L'interface se propageant s'appelle l'onde de choc.
On suppose connus les paramètres P_1, ρ_1, V_1.

a) On étudie le phénomène dans le référentiel lié à l'interface. Est-il galiléen?
b) En choisissant un système fermé contenant l'interface, montrer que la conservation de la masse donne $\rho_2.C = \rho_1.(C+V)$.
c) Faire un bilan de résultante cinétique pour ce système et relier l'écart de pression aux masses volumiques et vitesses.

Le système d'équations comporte une inconnue en trop. Une condition thermodynamique est nécessaire pour résoudre. La compression est supposée adiabatique réversible. La variation de masse volumique est ainsi reliée à la variation de pression par le coefficient de compressibilité adiabatique $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$. La variation relative de masse volumique étant très faible, donner une relation entre $P_2 - P_1$, $\rho_2 - \rho_1$ et χ_S. Déduire des trois expressions établies les expressions de C, P_2 et ρ_2.