

Chap.2 – Superposition d’ondes : interférences ou non ?

1. Conditions pour obtenir des interférences

- 1.1. Terme d’interférence dans l’expression de l’éclairement résultant
- 1.2. Condition d’interférence n°1a : deux ondes de même fréquence
- 1.3. Condition d’interférence n°1b : deux trains secondaires issus d’un même train primaire
- 1.4. Réaliser la condition d’interférence n°1 : utiliser un dispositif diviseur d’onde
- 1.5. Différence de marche depuis la source primaire S
- 1.6. Condition d’interférence n°2 : une ddm plus petite que la longueur d’un train d’onde $\delta < Lc$
- 1.7. Bilan des interférences à deux ondes : expression de l’éclairement total
- 1.8. Champs d’interférence
- 1.9. Situations possibles en exercice

2. Interprétation des figures d’interférences à deux ondes

- 2.1. Démonstration de la formule des interférences en notation complexe
- 2.2. Ordre d’interférence
- 2.3. Franges brillantes et sombres
- 2.4. Figures d’interférence (3D et 2D) obtenues avec deux sources ponctuelles
- 2.5. Contraste d’une figure d’interférence

3. Interprétation d’une figure d’interférences à N ondes

- 3.1. Exemple concret du réseau plan
- 3.2. Calcul mathématique de l’éclairement en notation complexe
- 3.3. (Complément HPgm) Interprétation graphique de la figure d’interférences (Fresnel)

Intro : Il suffit de superposer les faisceaux de deux lampes de poche pour voir que l’éclairement résultant est la somme des éclairages de chacune des lampes. Pourtant, deux fentes éclairées par une source ponctuelle de lumière blanche donnent sur un écran l’image ci-contre, d’éclairement non uniforme. Dans une première partie, on établit les conditions à remplir pour obtenir des interférences lors de la superposition de deux faisceaux lumineux. On interprète ensuite les figures d’interférences obtenues avec deux sources cohérentes ponctuelles monochromatiques. On finit par l’étude d’une figure d’interférences obtenues avec N sources ponctuelles cohérentes monochromatiques ($N \gg 1$).

1. Conditions pour obtenir des interférences

1.1. Terme d’interférence dans l’expression de l’éclairement résultant

Soit deux sources ponctuelles monochromatiques S_1 et S_2 , de pulsations ω_1 et ω_2 .

Lorsque la source S_1 est seule, elle produit un éclairement $\varepsilon_1(M)$ en tout point M de l’espace atteint par la lumière qu’elle émet. Lorsque la source S_2 est seule, elle produit un éclairement $\varepsilon_2(M)$ au même point M de l’espace, si la lumière qu’elle émet l’atteint aussi.

❖ Lorsque les deux faisceaux (émis par chaque source) se croisent en un point M de l’espace, montrer que l’éclairement résultant $\varepsilon(M)$ s’écrit comme la somme $\varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M)$... PLUS un 3^e terme

On appelle ce 3^e terme le *terme d’interférence*. Lorsqu’il est nul, il n’y a pas d’interférences.

1.2. Condition d'interférence n°1a : deux ondes de même fréquence

- ❖ Montrer que si les sources sont de fréquences différentes, alors le terme d'interférence est nul.

1.3. Condition d'interférence n°1b : deux trains secondaires issus d'un même train primaire

- ❖ Les deux sources ont à présent même fréquence ($\omega_1 = \omega_2$). Exprimer le terme d'interférence en fonction des retards de phase au niveau des sources $\varphi_1(S_1)$ et $\varphi_2(S_2)$.

On a vu qu'une onde parfaitement monochromatique n'existe pas. On raffine à présent notre étude en remarquant que nos deux ondes qui se rencontrent en M sont en fait des ondes quasi-monochromatiques (des trains d'onde).

- ❖ En déduire que l'existence d'interférences en M nécessite que les deux ondes qui se rejoignent soient deux trains d'onde secondaires issus d'un même train d'onde primaire

On vient d'expliquer pourquoi on ne peut obtenir d'interférences en superposant les faisceaux de deux lampes de poche. Pour obtenir des interférences, il faut que les retards de phase aux points S_1 et S_2 soient à chaque instant identiques.

1.4. Réaliser la condition d'interférence n°1 : utiliser un dispositif diviseur d'onde

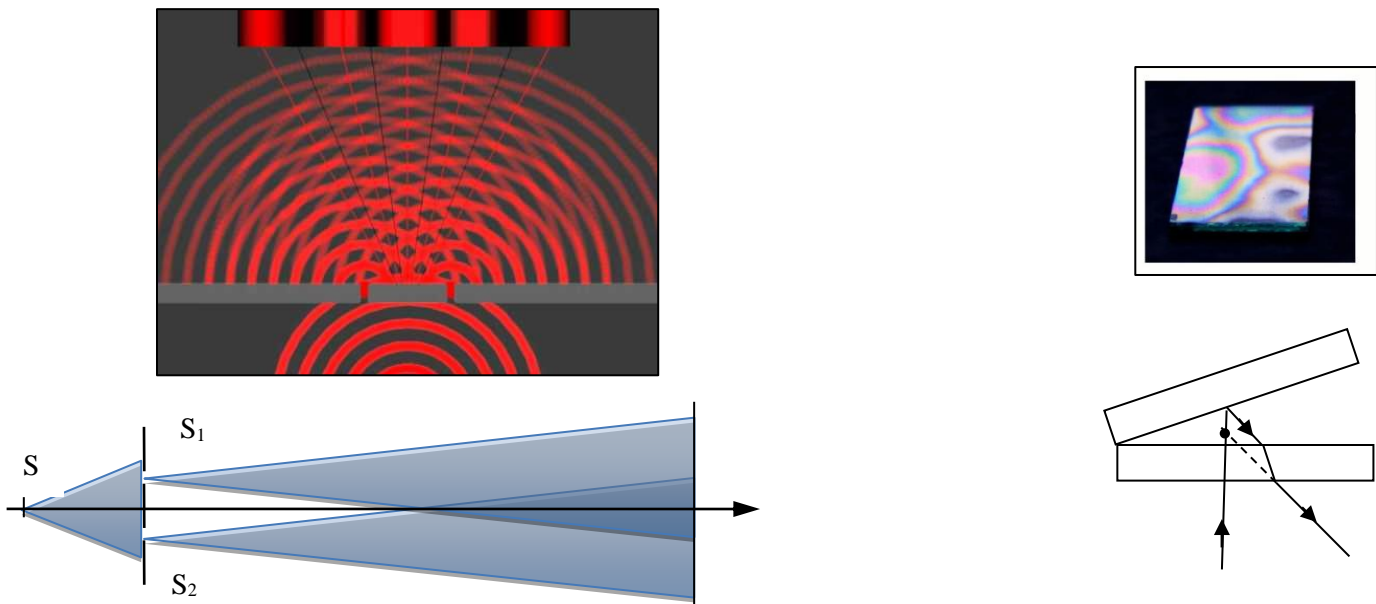
Nécessite de diviser un train d'onde primaire

On voit des interférences si les deux trains d'onde qui se croisent sont **issus d'un même train d'onde primaire**.

Deux méthodes pour diviser le train d'onde primaire :

- **division du front d'onde** : trous ou fentes d'Young, miroirs de Fresnel, etc.
- **division d'amplitude** : lames de verre, interféromètre de Michelson, de Mach-Zender, etc.

On peut alors dessiner un **schéma optique équivalent** pour repérer les deux sources S_1 et S_2 cohérentes.



- ❖ Dans le cas de gauche (division du front d'onde), dessiner deux rayons (un passant par S_1 l'autre par S_2), qui se coupent en un même point de l'écran. Repérer la différence de chemin optique parcouru par ces deux rayons, entre le point d'émission et le point d'arrivée.

1.5. Différence de marche depuis la source primaire S

On vient de voir que les sources S_1 et S_2 ne peuvent produire des interférences visibles que si ce sont des sources secondaires créées à partir d'une source primaire S .

- ❖ Exprimer le terme d'interférence en fonction des deux chemins optiques $(SM)_1$ et $(SM)_2$

Définition de la différence de marche

Deux ondes issues de la même source S interfèrent au point M , en ayant suivi deux parcours différents.

La **différence de marche** δ des deux ondes en M est la **différence des deux chemins optiques** :

$$\delta_{21}(M) \stackrel{\text{def}}{=} (SM)_2 - (SM)_1$$

NB : la ddm n'est rien d'autre que la **différence de retard de phase exprimée en mètres** (pratique à mesurer).

1.6. Condition d'interférence n°2 : une ddm plus petite que la longueur d'un train d'onde $\delta < L_c$

- ❖ En raisonnant sur un schéma à partir du modèle de train d'onde, et en se plaçant dans le vide, montrer que la différence de marche doit être inférieure à la longueur de cohérence pour que la condition soit vérifiée.

Cette démonstration est aussi valable dans les milieux non vides en se souvenant que les notions de chemin optique et de longueur de cohérence sont en fait des traductions « en mètres » de durées.

1.7. Bilan des interférences à deux ondes : expression de l'éclairement total

Eclairement résultant de deux sources **INCO**hérentes

Si les sources sont incohérentes :

$$\varepsilon_{\text{tot}}(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M)$$

Eclairement résultant de deux sources **CO**hérentes

Si les sources sont cohérentes :

$$\underline{\varepsilon}_{\text{tot}}(M, t) = \underline{\varepsilon}_1(M, t) + \underline{\varepsilon}_2(M, t)$$

On obtient alors la **formule de Fresnel** (interférences à deux ondes uniquement) :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_1(M) + \varepsilon_2(M) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}\right)$$

On cherche généralement à se placer dans le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (alors noté ε_0) :

$$\varepsilon(M) = 2\varepsilon_0(M) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}\right)\right)$$

Pour que les sources soient **cohérentes**, les conditions suivantes doivent être remplies :

- les sources sont **ponctuelles quasi-monochromatiques de même fréquence**
- les sources sont des **sources secondaires**, émettant des **trains d'onde issus d'un même train primaire**
- la **différence de marche** doit être inférieure à la longueur de cohérence $|\delta| < L_c$

1.8. Champs d'interférence

Pour que des interférences soient observables, encore faut-il que deux faisceaux (cohérents) se croisent.

Le champ d'interférences est la zone de l'espace 3D dans laquelle les faisceaux issus des deux sources cohérentes *se croisent*. Ce champ dépend évidemment de la forme des faisceaux issus des sources secondaires. Dans le cas des fentes d'Young, c'est l'élargissement angulaire dû au *phénomène de diffraction* qui permet aux faisceaux secondaires de se rencontrer.

1.9. Situations possibles en exercice

Situation la plus courante

L'énoncé présente la source primaire S ainsi que le dispositif divisant l'onde primaire en deux ondes secondaires.

On repère (ou non) les deux sources secondaires S_1 et S_2 .

On exprime ensuite la différence de marche $\delta(M)$ en tout point M du champ d'interférences ou de l'écran.

Via la formule de Fresnel, on en déduit l'éclairement $\varepsilon(M)$.

Situation rare

L'énoncé ne présente pas la source primaire, mais donne directement les deux sources secondaires cohérentes.

L'énoncé donne la relation mathématique entre $\varphi_1(S_1)$ et $\varphi_2(S_2)$.

On utilise la notation complexe pour retrouver la formule de Fresnel (énoncé donne la déf de $\varepsilon(M)$ en cpx).

On exprime ensuite la ddm (qui apparaît dans Fresnel) en tout point M du champ d'interférences ou de l'écran.

Situation plus rare encore

Comme le point précédent, mais avec éventuellement un nombre de sources secondaires >2 .

2. Interprétation des figures d'interférences à deux ondes

2.1. Démonstration de la formule des interférences en notation complexe

Imaginons l'énoncé de concours suivant :

« Soient deux sources S_1 et S_2 cohérentes. Démontrer la formule de Fresnel ».

Il vous faut comprendre les deux choses suivantes :

- S_1 et S_2 sont nécessairement deux sources secondaires, issues de la division d'un faisceau lumineux primaire en deux faisceaux secondaires
- pour le calcul demandé, on se dote donc directement du modèle d'onde purement monochromatique. Les ondes émises par ces deux sources ont évidemment même pulsation ω , et l'on se place tout de suite en complexe.

Lorsque les ondes sont cohérentes, on peut utiliser la **notation complexe** pour retrouver **rapidement** la formule.

2.2. Ordre d'interférence

Définition de l'ordre d'interférence

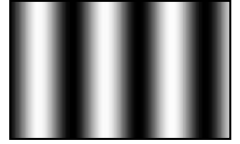
On peut souhaiter travailler avec une **différence de marche adimensionnée**, c'est l'**ordre d'interférence** :

$$p(M) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

Lorsqu'il est entier, l'éclairement est maximal. Lorsqu'il est demi-entier, l'éclairement est minimal.

L'ordre d'interférence dépend bien-sûr du point M de l'espace où l'on observe l'éclairement.
Mais **il peut dépendre d'autres variables**, notamment tous les **paramètres constitutifs de l'interféromètre**.
Lors de l'étude de dispositifs concrets, on s'attachera toujours à repérer les paramètres dont dépend p .

2.3. Franges brillantes et sombres



La **figure d'interférence** est la représentation de l'éclairement en fonction de la position $\epsilon(\mathbf{M})$. C'est ce que l'on voit sur un écran, ou ce qui est détecté par un photodétecteur.

Souvent la figure d'interférences présente une succession de « zones brillantes » et de « zones sombres ». L'exemple ci-contre est obtenu en lumière monochromatique avec des fentes d'Young.

Les zones brillantes sont appelées « **franges brillantes** ». Les zones sombres sont appelées « **franges sombres** ». Les franges ne sont pas toujours rectilignes ou circulaires (même si ce sont les cas que l'on rencontrera souvent).

Frange brillante : critère physique

Au milieu d'une frange brillante, l'éclairement est maximal. Les ondes interfèrent **constructivement** ($k \in \mathbb{Z}$) :

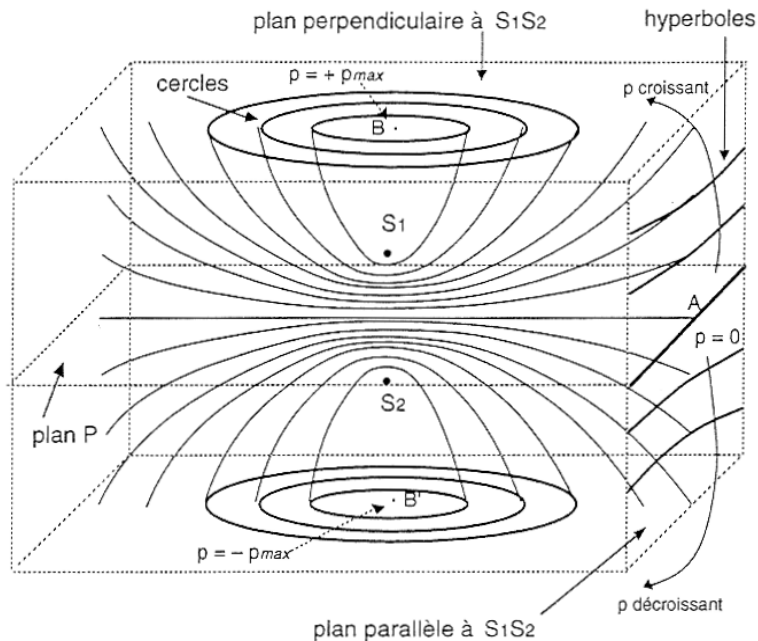
$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\mathbf{M}) &= k \times 2\pi \\ \delta &= k \times \lambda \\ p &= k\end{aligned}$$

Frange sombre : critère physique

Au milieu d'une France sombre, l'éclairement est minimal. Les ondes interfèrent **destructivement** ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\mathbf{M}) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \times 2\pi \\ \delta &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \times \lambda \\ p &= k + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.4. Figures d'interférence (3D et 2D) obtenues avec deux sources ponctuelles



- ❖ Soient deux sources ponctuelles émettant de la lumière dans toutes les directions. Montrer que les surfaces d'égal éclairement sont des hyperboloïdes.
- ❖ Comment faut-il disposer l'écran pour obtenir des franges en anneaux ? des franges quasi-rectilignes ?
- ❖ Sur la figure, comment est définie la ddm : $\delta_{21} = (S_2\mathbf{M}) - (S_1\mathbf{M})$? ou $\delta_{12} = (S_1\mathbf{M}) - (S_2\mathbf{M})$?

2.5. Contraste d'une figure d'interférence

Définition du contraste

(ou « visibilité »)

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}}{\epsilon_{\max} + \epsilon_{\min}}$$

ϵ_{\max} et ϵ_{\min} étant un maximum et un minimum successifs

Il est alors facile de montrer que :

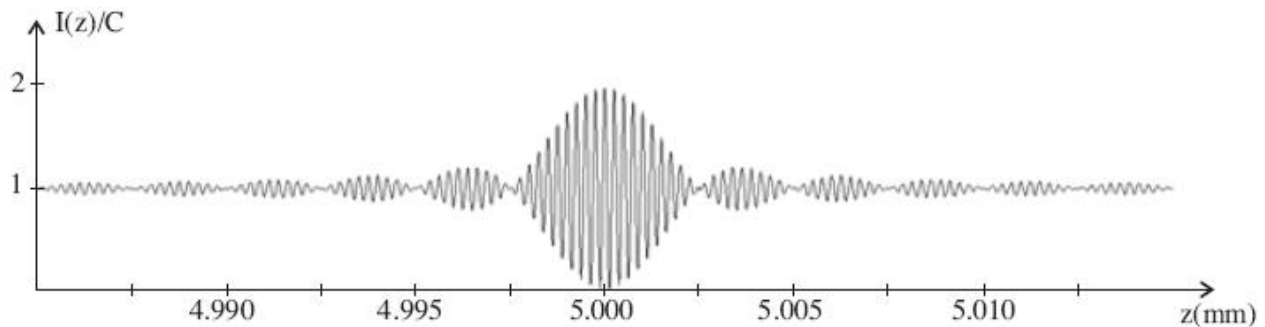
$$\epsilon(M) = \epsilon_{\text{moy}} \left(1 + C \cos \left(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda} \right) \right)$$

avec $\epsilon_{\text{moy}} = \epsilon_1 + \epsilon_2$

ϵ_{moy} est l'éclairement que donneraient deux sources incohérentes. On note que le phénomène d'interférence vérifie bien-sûr la conservation de l'énergie, car en moyenne l'éclairement est le même qu'en l'absence d'interférences : l'énergie lumineuse est juste distribuée différemment dans l'espace.

On peut montrer en étudiant la fonction $C \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)$ que le contraste est maximal lorsque $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Dans ce cas, au milieu des franges sombres, l'intensité est nulle. Pour $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = 100$, $C \sim 0,2$.

Exemple d'évolution du contraste :

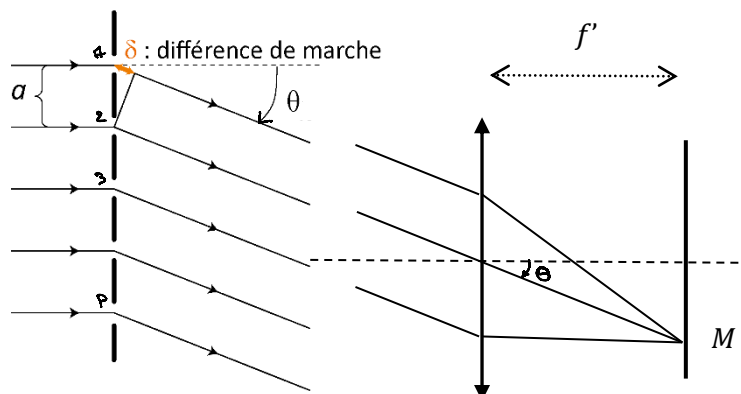


La figure ci-dessus représente l'éclairement (ou l'intensité I) en fonction d'un paramètre z , qu'on supposera repérer la position selon l'horizontale d'un point sur l'écran où sont visibles les interférences.

❖ Evaluer la valeur numérique du contraste en plusieurs zones de la courbe.

3. Interprétation d'une figure d'interférences à N ondes

3.1. Exemple concret du réseau plan



Le réseau est utilisé en spectroscopie (« voir le spectre »), car il permet de séparer spatialement les différentes longueurs d'onde de la lumière incidente. C'est une alternative possible au prisme, étudiée en TP.

La figure ci-contre représente un faisceau incident normal au réseau plan. Le réseau est constitué d'un ensemble de N fentes régulièrement espacées, d'une distance a . L'ordre de grandeur est de qq 100 fentes par mm.

C'est le phénomène de diffraction qui est responsable du « changement de direction » des rayons lumineux lors du passage à travers une fente. On rappelle que le faisceau émergent diverge après la fente, avec une largeur angulaire de l'ordre de λ/d où d est la largeur d'une fente.

On choisit d'observer les interférences (entre N rayons émergents) à l'infini, i.e. dans le plan focal image d'une lentille CV. Les N rayons qui interfèrent entre eux à l'infini doivent émerger parallèlement les uns aux autres. Ceux émergeant avec un angle θ sont représentés sur la figure.

Dans ce cas, on remarque que la « différence de marche δ entre deux ondes issues de fentes successives » est la même, quel que soit le couple de fentes successives considéré.

NB : On définit la différence de marche entre deux fentes successives par :

$$(\forall p) \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} (S_p M) - (S_{p+1} M)$$

On verra au prochain chapitre comment montrer que δ est bien la distance dessinée sur le schéma

NB : On notera que le point M considéré sur l'écran est repéré, au niveau du réseau, par l'angle θ (< 0).

3.2. Calcul mathématique de l'éclairement en notation complexe

Le réseau plan réalise N divisions du front d'onde, et les fentes peuvent donc être considérées comme des sources secondaires **cohérentes entre elles, de même amplitude** (fentes de même largeur, éclairées de la même façon).

Dans le cas d'interférences entre sources cohérentes, on adopte le modèle monochromatique et l'on utilise la **notation complexe** (calculs plus simples).

On considère les N ondes cohérentes issues des N fentes du réseau.

En un point M de l'écran, la différence de marche entre deux ondes consécutives (issues de deux fentes qui se jouxtent) est toujours la même et vaut δ .

Préliminaires :

- On note S_p la p^e fente
- Les retards de phase « $\varphi_p(S_p)$ » des N ondes « émises » par les fentes sont tous égaux, car ces N ondes sont issues de la division d'une même onde mère (plane et d'incidence normale) ; et le plan du réseau est confondu avec un plan d'onde de cette onde mère : les $\varphi_p(S_p)$ sont indépendantes de p
- La différence de marche entre deux ondes successives est définie par $(\forall p) : \delta = (S_p M) - (S_{p+1} M)$
- ❖ Exprimer l'onde $\underline{s}_p(M, t)$ (onde émise par la p^e fente) en fonction du retard de phase à l'émission $\varphi_p(S_p)$
- ❖ Exprimer l'onde complexe $\underline{s}_p(M, t)$ en fonction de $\underline{s}_{p-1}(M, t)$ et δ
- ❖ Exprimer l'onde complexe $\underline{s}_p(M, t)$ en fonction de $\underline{s}_1(M, t)$, δ et p
- ❖ Exprimer l'onde complexe totale en $M : \underline{s}_{tot}(M, t)$
- ❖ En déduire l'éclairement $\varepsilon_{tot}(M)$ en fonction de δ :

$$\varepsilon_{tot}(M) = \varepsilon_1(M) \frac{\sin^2\left(\pi \times N \frac{\delta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\pi \times \frac{\delta}{\lambda}\right)}$$

On démontrera au chapitre suivant qu'en un point $M(\theta)$ de l'écran : $\delta(\theta) = a \sin(\theta)$.

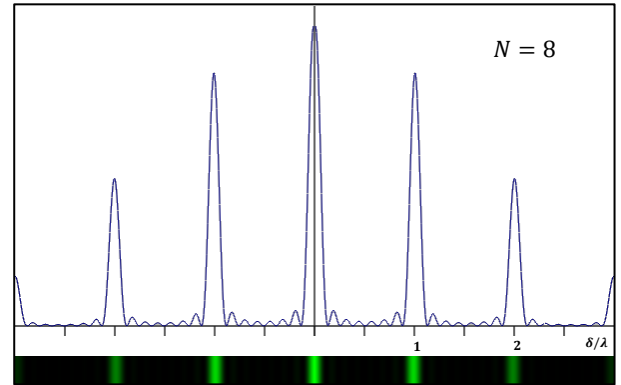
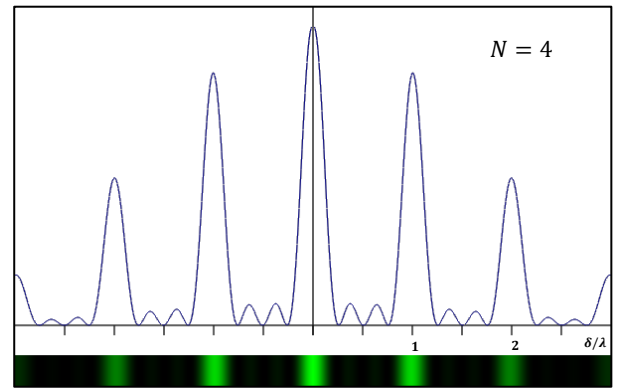
Il y a donc bijection entre θ et δ . On peut donc faire comme si δ repérait la position du point M sur l'écran.

- ❖ Tracer l'allure de l'éclairement en fonction de δ avec la calculatrice)
- ❖ Donner les valeurs de δ correspondant à des maxima principaux
- ❖ Que peut-on dire des maxima secondaires ?
- ❖ Exprimer la largeur $\Delta\delta$ d'un pic principal

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/reseau2.html>

Remarque : On remarque que les amplitudes des pics ne sont pas toutes identiques. On remarque une enveloppe décroissante à partir du pic central.
Un calcul complet prenant en compte la diffraction permet d'expliquer cette enveloppe décroissante.

NB : Cette enveloppe est d'autant plus étroite que la taille d des fentes est grande.



3.3. (Complément HPgm) Interprétation graphique de la figure d'interférences (Fresnel)

Rappels : représentation des complexes dans le diagramme de Fresnel

- ⊛ Comment représente-t-on l'amplitude complexe d'une grandeur sinusoïdale dans le diagramme de Fresnel ?
- ⊛ Expliquer comment l'on somme deux grandeurs sinusoïdales dans ce diagramme. Comment repère-t-on alors l'amplitude et la phase à l'origine de la somme ?

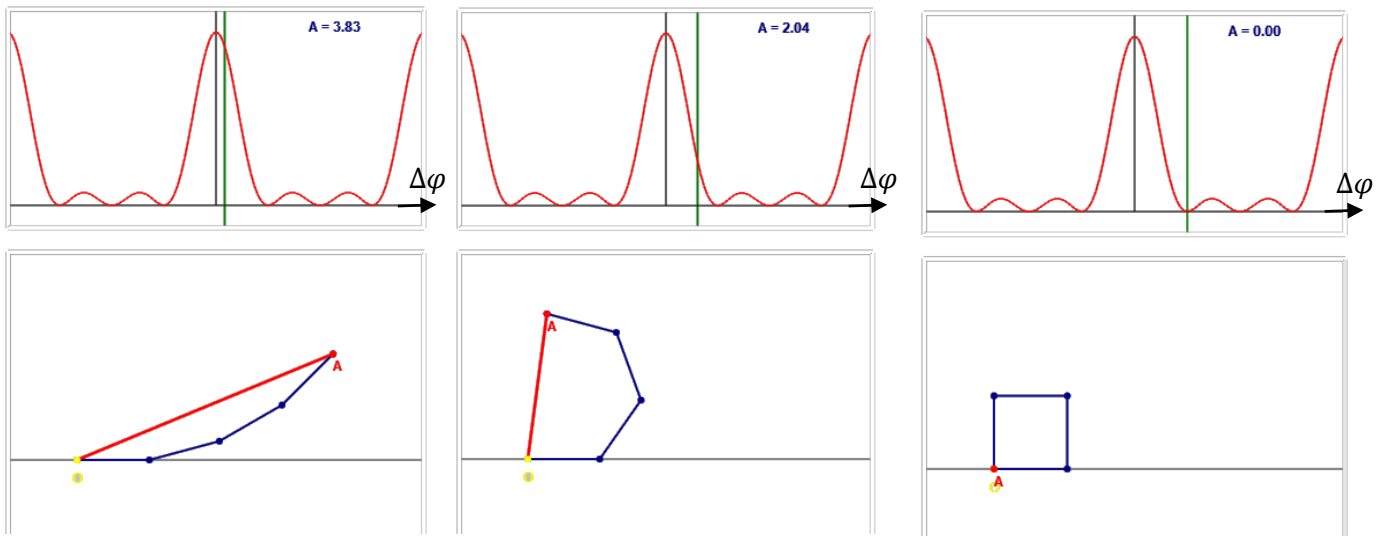
Le programme stipule que l'on doit pouvoir exprimer

- les conditions d'interférence constructive (maxima)
- ainsi que la largeur (ou inversement la finesse) des grands pics

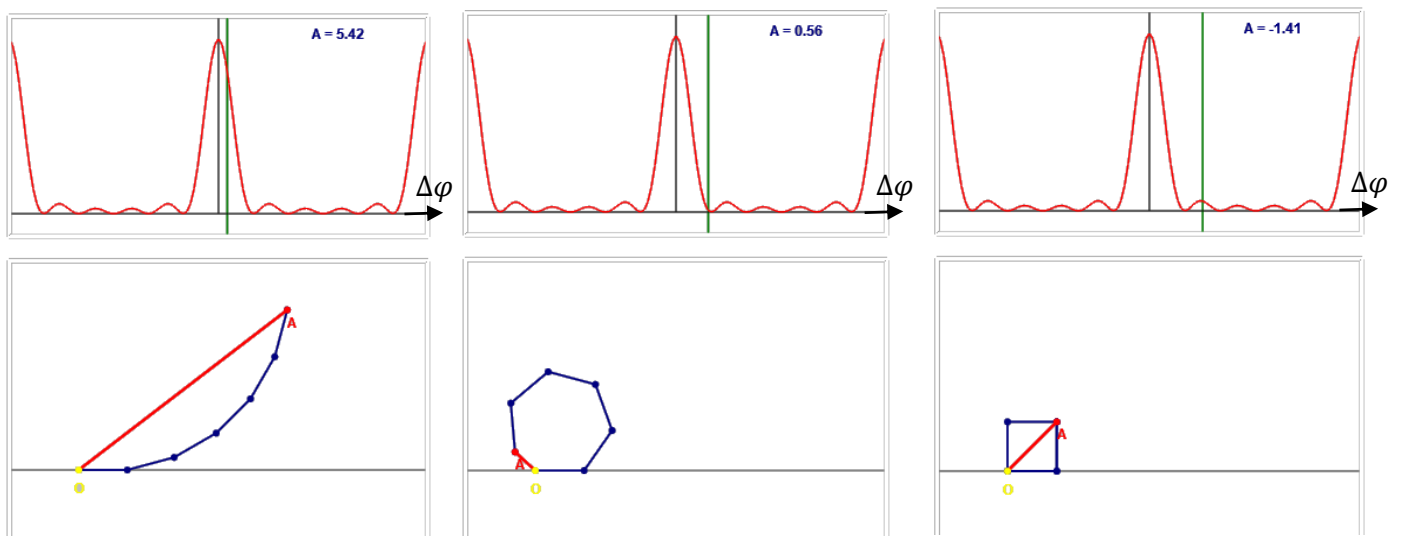
sans utiliser le résultat HP du paragraphe précédent, mais à l'aide de la représentation de Fresnel

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optiondu/interfres.html>

Figures ci-dessous : $N = 4$ et $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ vaut 15° , 55° et 90°



Figures ci-dessous : $N = 6$ et $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ vaut 15° , 55° et 90°



Sur les figures A représente la valeur de l'éclairement, en unité arbitraire. Pour $N = 4$, le pic central est à $A = 4$. Pour $N = 6$, le pic central est à $A = 6$.

- ⊛ A partir de ces figures, expliquer que les maxima soient atteints lorsque $\frac{\delta}{\lambda}$ est entier

- ✦ Montrer que la demi-largeur des pics (mesurée à leur base) vaut $\frac{2\pi}{N}$

Dans la partie « **Superposition d'ondes lumineuses** », le professeur est invité à s'appuyer sur des situations concrètes, des illustrations expérimentales et des simulations afin de donner du sens aux différentes notions présentées.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Superposition d'ondes lumineuses	
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques non synchrones ou incohérentes entre elles.	Justifier et utiliser l'additivité des intensités.
Superposition de deux ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles : formule de Fresnel.	Établir la formule de Fresnel. Identifier une situation de cohérence entre deux ondes et utiliser la formule de Fresnel.
Contraste.	Associer un bon contraste à des ondes d'intensités voisines.
Superposition de N ondes quasi-monochromatiques cohérentes entre elles, de même amplitude et dont les phases sont	Expliquer qualitativement l'influence de N sur l'intensité et la finesse des franges brillantes observées.
en progression arithmétique dans le cas $N \gg 1$.	Établir, par le calcul, la condition d'interférences constructives et la demi-largeur $2\pi/N$ des franges brillantes. Établir et utiliser la formule indiquant la direction des maxima d'intensité derrière un réseau de fentes rectilignes parallèles.

Manip de cours :

- interférences en lumière blanche avec deux lames minces pressées l'une contre l'autre

Annexe

Justification de la nullité du terme d'interférences quand $\varphi_2(S_2) \neq \varphi_1(S_1)$

Notons Φ_1 la variable aléatoire de densité de proba f_1 , représentant $\varphi_1(S_1)$

Notons Φ_2 la variable aléatoire de densité de proba f_2 représentant $\varphi_2(S_2)$

Montrons que $\langle \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \rangle = 0$ lorsque les deux variables ne sont pas identiques et sont indépendantes.

Notons d'emblée que le calcul de cette valeur moyenne sur le temps de réponse du photo-détecteur revient à calculer la moyenne statistique de la variable aléatoire $\cos(\Phi_2 - \Phi_1)$, car la durée d'intégration est très grande devant le temps de cohérence, et le nombre « de tirages » de la variable aléatoire est suffisamment grand.

D'abord :

$$\langle \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \rangle = \langle \cos(\Phi_2) \cos(\Phi_1) \rangle + \langle \sin(\Phi_2) \sin(\Phi_1) \rangle$$

Montrons ensuite que $\langle \cos(\Phi_2) \cos(\Phi_1) \rangle = \langle \cos(\Phi_2) \rangle \times \langle \cos(\Phi_1) \rangle$, et idem en sinus :

Soit f_{12} la densité de probabilité du couple de variables aléatoires.

On rappelle que $f_{12}(\varphi_1, \varphi_2) \times d\varphi_1 d\varphi_2$ est **la probabilité de trouver Φ_1** dans l'intervalle $[\varphi_1; \varphi_1 + d\varphi_1[$

ET de trouver Φ_2 dans l'intervalle $[\varphi_2; \varphi_2 + d\varphi_2[$

On rappelle également que des variables sont indépendantes ssi « $Proba(X \text{ et } Y) = Proba(X) \times Proba(Y)$ ».

Ainsi :

$$f_{12}(\varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 = f_1(\varphi_1) d\varphi_1 \times f_2(\varphi_2) d\varphi_2$$

Revenons aux valeurs moyennes :

$$\langle \cos(\Phi_2) \cos(\Phi_1) \rangle = \iint \cos(\varphi_2) \cos(\varphi_1) \times f_{12}(\varphi_1, \varphi_2) \times d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$\langle \cos(\Phi_2) \cos(\Phi_1) \rangle = \left(\int \cos(\varphi_2) f_2(\varphi_2) d\varphi_2 \right) \times \left(\int \cos(\varphi_1) f_1(\varphi_1) d\varphi_1 \right) = \langle \cos(\Phi_2) \rangle \times \langle \cos(\Phi_1) \rangle$$

Montrons à présent que $\langle \cos(\Phi_2) \rangle = 0$ quand Φ_2 est uniforme sur $[0; 2\pi[$

$$\langle \cos(\Phi_2) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_2) \times \frac{1}{2\pi} \times d\varphi_2 = 0$$

Idem pour $\langle \sin(\Phi_2) \rangle$ et pour cosinus et sinus en Φ_1 .

CQFD

NB : le terme de différence de marche n'apparaît pas dans le cosinus, au départ du raisonnement. On rappelle que ce n'est pas une variable aléatoire, ni un terme dépendant du temps. C'est une constante dans le calcul de la valeur moyenne.

Le rajouter ne change pas grand-chose à l'idée de la démonstration. En le notant α , il suffit de commencer par l'étape :

$$\cos(\Phi_2 - \Phi_1 + \alpha) = \cos(\Phi_2 - \Phi_1) \cos(\alpha) - \sin(\Phi_2 - \Phi_1) \sin(\alpha)$$