Chap.3 – Ecoulement incompressible dans une conduite

Intro : Nous étudions ici un type d'écoulement simple, très répandu dans la vie quotidienne et dans l'industrie : les écoulements ***incompressibles homogènes*** (i.e. une seule phase) dans des ***conduites cylindriques***. Ce type d'écoulement n'est pas explicitement au programme de PC, mais c'est une application courante du chap. 3.

A cette occasion, on introduit la différence entre écoulements ***laminaires*** et ***turbulents***.
Les observations expérimentales montrent que la transition laminaire→turbulent se fait pour une valeur particulière du ***nombre de Reynolds***.

A bas nombre de Reynolds, le calcul analytique est possible en régime permanent : c'est l'écoulement de ***Hagen-Poiseuille***. On mentionne qu'à haut nombre de Reynolds, les ingénieurs utilisent un abaque : le *diagramme de Moody* (hors programme PC).

Quel que soit le nombre de Reynolds de l'écoulement, celui-ci se traduit par une ***chute de pression proportionnelle à la longueur de conduite traversée***. L'analogie est faite avec la chute de potentiel aux bornes d'une résistance électrique traversée par un courant continu.

1. Régime laminaire / turbulent – Nombre de Reynolds

1.1. Préliminaire expérimental : comment faire s'écouler un fluide dans une conduite ?

Une conduite sert à transporter du fluide d'un endroit à un autre. L'expérimentateur souhaite effectuer ce transport avec un certain débit. Souvent, une des deux extrémités est à une pression fixée par l'extérieur (pression atmosphérique si cette extrémité est ouverte sur l'air ambiant), et l'expérimentateur doit se munir d'un dispositif en amont pour y fixer une pression supérieure à la pression atmosphérique, et permettant l'écoulement du fluide.

Il est clair qu'en général il doit trouver un compromis entre :
- le débit souhaité
- la différence de pression à imposer aux bornes de la conduite
- la géométrie de la conduite (section et longueur)

Il existe plusieurs façons d'imposer une pression à une extrémité :

- via une « grande » cuve pleine de liquide : le liquide est quasiment immobile au fond de la cuve, donc la pression à l'entrée de la conduite est donnée par l'hydrostatique. C'est un circuit hydraulique « ouvert » : la cuve se vide petit à petit (exemple du château d'eau).

- pour un gaz, le dispositif équivalent serait une bombonne où le gaz a été préalablement stocké à une pression élevée (en général fluide est diphasé gaz/liquide).

- via une pompe pour un liquide (on dit plutôt compresseur pour un gaz). Le rôle de la pompe est analogue à celui d'une source de tension en électricité. Elle impose une différence de pression entre ses bornes, qui dépend du débit volumique qui la traverse (lui-même dépendant du réseau hydraulique alimenté par la pompe, comme en élec). Cette différence de pression diminue lorsque le débit augmente : ce comportement est analogue à celui des sources de tension usuelles. En général, la courbe représentant la différence de pression en fonction du débit n'est pas affine (taper « courbe de pompe » dans Google Image pour illustrations)

1.2. Observations expérimentales : transition laminaire / trubulent

L'exemple d'un écoulement d'eau sortant d'un robinet, ainsi que les vidéos projetées en cours mettent en évidence deux régimes d'écoulement. Apparemment, lorsque la vitesse du fluide est assez faible, l'écoulement est régulier. Lorsque la vitesse du fluide augmente, il existe un seuil au-delà duquel l'écoulement n'est plus régulier : en un point de l'espace le champ des vitesses *fluctue* autour d'une valeur moyenne, et ces fluctuations semblent *aléatoires*.

Un écoulement est ***laminaire*** lorsque le mouvement des particules fluides se fait de manière ***régulière*** et ordonnée. Elles glissent les unes sur les autres, comme des lames de fluide.

Il est ***turbulent*** lorsque le déplacement est irrégulier et que des ***fluctuations aléatoires*** de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide.

Du fait de la viscosité du fluide, le fluide situé contre les parois de la conduite est immobile, et la vitesse du fluide est vraisemblablement maximale au centre de la conduite. Si l'on souhaite connaître « la vitesse » pour laquelle la transition laminaire / turbulent se fait, quelle vitesse doit-on considérer ? L'idée la plus naturelle est de définir une vitesse moyenne dans une section droite de l'écoulement.

1.3. Vitesse débitante (ou « vitesse moyenne »)

Définition de la vitesse débitante

La vitesse débitante $\boldsymbol{U}$ *est définie par :*

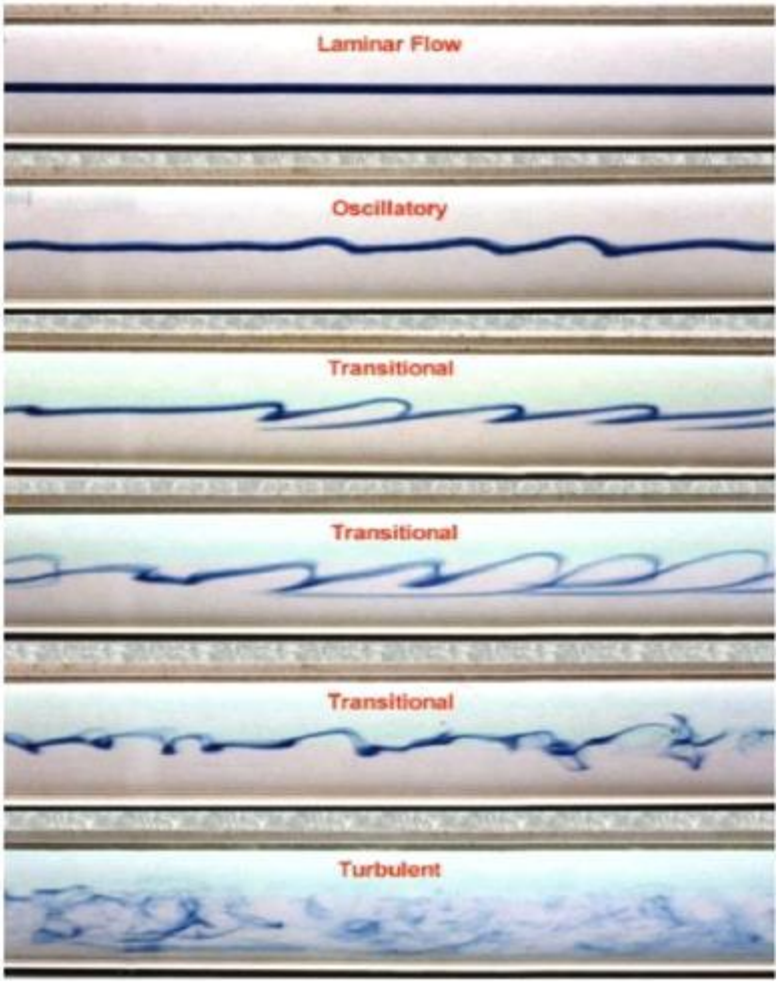
$$\boldsymbol{U} \overset{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{D_v}}{\boldsymbol{S}}$$

où S est une ***section droite*** *de la conduite.*

❖ Cette définition vous semble-t-elle similaire à celle vue en math pour une fonction à une variable ?

1.4. Le nombre de Reynolds pour distinguer régimes laminaire et turbulent

Les mesures d'Osborne Reynolds, ingénieur et physicien irlandais, datent de 1883 et sont des TP classiques effectués dans les écoles enseignant l'hydraulique (on peut trouver de nombreuses vidéos sur internet). Ces expériences montrent qu'une valeur seuil de R_e permet de distinguer les écoulements laminaires et turbulents.



Critère portant sur R_e pour distinguer laminaire / turbulent

$R_e < 2000$: *l'écoulement est* ***laminaire***
$2000 < R_e < 4000$: *l'écoulement n'est plus laminaire à tout instant,* ***transition*** *laminaire / turbulent*
$4000 < R_e$: *l'écoulement est* ***turbulent***

Dans une large mesure, ce classement est ***indépendant des paramètres*** ρ, U, D, η ***pris isolément !***

Il peut exister des exceptions à cette classification, mais dans la très grande majorité des cas, elle est vérifiée. Si la conduite n'est pas cylindrique (section rectangulaire par exemple), les ordres de grandeur sont conservés.

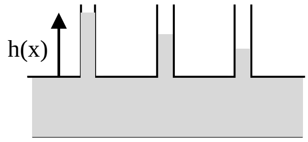
Les écoulements suivants sont-ils laminaires ou turbulents ?
- ❖ Transport d'eau potable depuis lieu stockage jusque votre robinet
- ❖ Microfluidique : transport de liquides sur micropuces (rayon canaux $\sim 1\ mm$, vitesse max $10\ mm.s^{-1}$)
- ❖ Lubrifiant moteur de voiture ($0,1\ Pl$)

2. Chute de pression dans une conduite horizontale

2.1. Observations expérimentales : décroissance affine de la pression le long de la conduite

Vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=k0Y8UA5dTrk
Le dispositif comprend une cuve contenant de l'eau colorée en bleu, reliée par un tuyau en caoutchouc à une conduite horizontale en verre. Cette dernière est surmontée de quatre tubes en verre verticaux, disposés le long de

la conduite et régulièrement espacés les uns des autres. Ces tubes sont ouverts à l'air libre, et constituent des « prises de pression » : le niveau d'eau dans ces tubes est une mesure de la pression dans la conduite.
La cuve étant placée en hauteur, le robinet est ouvert et l'eau s'écoule dans la conduite. En régime permanent, on observe un niveau d'eau dans les tubes verticaux qui traduit une décroissante affine de la pression le long de la conduite. Les paragraphes ci-dessous permettent de décrire et d'expliquer cette observation expérimentale.



Pourquoi le niveau d'eau dans les tubes est-il une mesure de la pression au point de la conduite placé en-dessous du tube ?

- ❖ Répondre à cette question, en supposant que la pression est uniforme en toute section de la conduite, et qu'elle ne subit pas de discontinuité lors du passage de la zone d'écoulement à la zone statique

2.2. Petits Re : Ecoulement de Hagen-Poiseuille – Résistance hydraulique

« Ecoulement de Poiseuille » est un écoulement provoqué par une différence de pression aux extrémités de la conduite (NB : il semble que cette appellation soit réservée au cas d'un écoulement *laminaire*, mais pas toujours).
A bas nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire et l'on va montrer qu'avec quelques hypothèses simplificatrices, il est facile de déterminer le champ des vitesses de manière analytique. Ce ne sera plus le cas pour des nombres de Reynolds plus grands, lorsque l'écoulement est turbulent.

Les hypothèses simplificatrices sont :

- étude en régime stationnaire
- on néglige les effets de bords : le champ des vitesses est unidirectionnel, dirigé selon l'axe de la conduite, on peut écrire $\vec{v} = v(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$
- on néglige la pesanteur : le problème est symétrique de révolution, on peut écrire $P(r,z)$ et $\vec{v} = v(r,z)\overrightarrow{u_z}$
- l'écoulement est incompressible et homogène

La conduite est de longueur L, de section circulaire de rayon R, et une différence de pression $\Delta P > 0$ existe à ses extrémités.

Données : $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Ecoulement de Poiseuille cylindrique :

1. Montrer que le champ des vitesses ne dépend que de la coordonnée radiale r.
2. Déterminer le champ d'accélération (gradient en cylindrique doit être connu par cœur, sinon cf. annexe)
3. Appliquer Navier-Stokes. On admet que pour le champ des vitesses étudié ici, le laplacien vectoriel s'écrit $\vec{\Delta}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial v(r)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_z}$
4. En projetant, montrer que la pression ne dépend que de z, et que le gradient de pression dP/dz est constant. Quelle est sa valeur ?
5. Déterminer le champ des vitesses. Dessiner le profil des vitesses dans une section droite de l'écoulement.
6. Déterminer le débit volumique dans la conduite : $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$. En déduire la vitesse moyenne.

7. Que vaut la contrainte exercée par le fluide sur la paroi ?
8. Par analogie avec la loi d'ohm électrique, définir une *résistance hydraulique* en précisant les grandeurs électriques / hydrauliques analogues.

<u>Définition de la résistance hydraulique</u>
(pour Poiseuille LAMINAIRE en régime stationnaire)

$$\Delta P = \boldsymbol{R_H}\, D_V$$

*Cela signifie que la **chute de pression aux bornes** d'une conduite est **proportionnelle au débit de volume**.*
*La résistance hydraulique $\boldsymbol{R_H}$ dépend de la **viscosité** du fluide, de la **longueur** et de la **section** de la conduite.*

- ❖ Concernant l'expression de la résistance hydraulique en fonction des paramètres de la conduite, quelles sont les similitudes et les différences avec le cas électrique ?

Associations de résistances hydrauliques

Les lois d'association des résistances hydrauliques sont identiques à celles valables en électricité.
De conduites en ***parallèles*** *sont des conduites ayant leurs* ***deux bornes communes****.*
Des conduites en ***série*** *sont traversées par le* ***même débit volumique*** *de fluide.*

Les formules d'association sont les mêmes qu'en électricité, et se démontrent de la même façon.

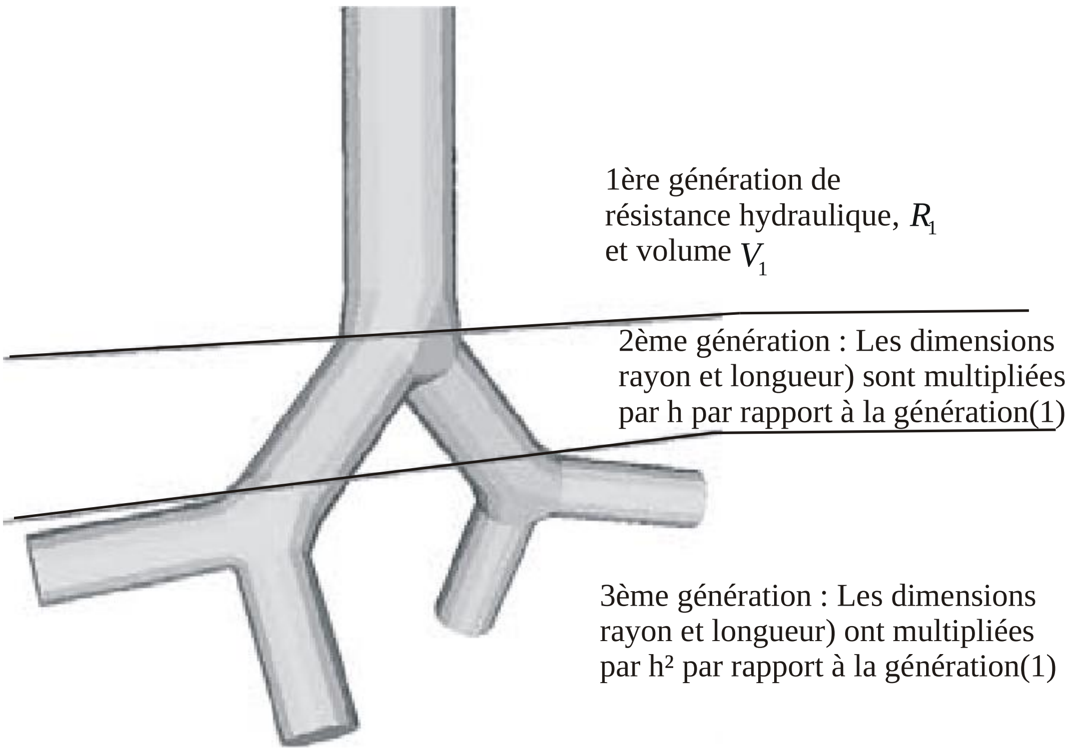
2.3. Exemple association de résistance hydraulique (bronches, CCP PSI 2008)

L'ARBRE BRONCHIQUE ET L'ENTROPIE

Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème, nous allons supposer que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elles se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons générations les différentes subdivisions qui seront indicées par les nombres successifs, p : la trachée est la génération $p=1$, les bronches, $p=2$, et ainsi de suite. Nous nous plaçons en régime permanent et l'air est assimilé à un fluide de viscosité η.

Une bronchiole de génération p est assimilée à un cylindre de rayon r_p et de longueur l_p. Nous admettrons que la loi de Poiseuille établie précédemment reste valable (en particulier entre $p=6$ et $p=16$).

A chaque génération, chaque dimension (rayon comme longueur) est multiplié par une constante h que l'on supposera identique pour les deux dimensions.



A.16. Déterminer le nombre $N(p)$ de bronchioles à la $p^{\text{ième}}$ génération en fonction de p.

A.17. Déterminer le rayon r_p et la longueur l_p de la bronchiole de génération p en fonction de p, h, r_1 et l_1, valeurs pour $p=1$.

A.18. Calculer le volume V_p d'une bronchiole de génération p en fonction de V_1, h et p. En déduire le volume total V_{pt} de la génération p. On posera $X = 2h^3$.

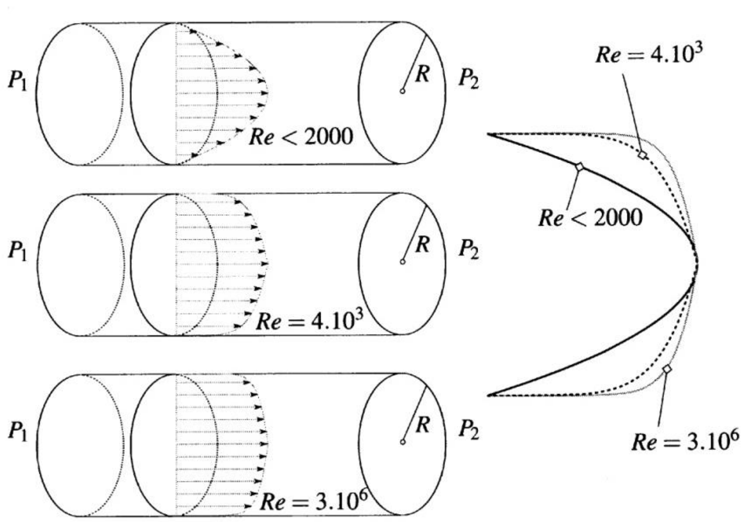
Montrer que le volume de l'arbre supposé contenir n générations est $V_t = V_1 \dfrac{1-X^n}{1-X}$.

A.19. Calculer la résistance hydraulique R_p d'une bronchiole de génération p en fonction de R_1, résistance hydraulique pour $p=1$ et p. En déduire la résistance hydraulique R_{tp} totale de la génération p.

Déterminer la résistance hydraulique R_t de l'arbre supposé contenir n générations.

2.4. (Culturel) Tous Re : Diagramme de Moody

A plus haut nombre de Reynolds, le calcul précédent n'est plus valable, car il suppose implicitement que le régime est laminaire. En effet, en présence de turbulences, le régime n'est plus stationnaire puisque le champ des vitesses est sujet à des fluctuations aléatoires en fonction du temps, et en tout point de l'écoulement.
Ces fluctuations se font autour d'une valeur moyenne, qui peut être mesurée expérimentalement ou simulée numériquement. On peut alors représenter graphiquement ce profil des vitesses moyenné dans le temps (cf. figure ci-dessous). On remarque que le profil n'est plus parabolique, mais aplati au centre de l'écoulement. La variation spatiale du champ des vitesses est localisée sur les bords de la conduite et se fait « plus brutalement » (sur une distance caractéristique plus courte).



Concernant la chute de pression le long de la conduite :

- elle évolue encore linéairement le long de la conduite
- mais elle n'est plus proportionnelle au débit volumique

La chute de pression dépend de manière complexe du nombre de Reynolds et de la rugosité des parois de la conduite. Il faut alors utiliser des abaques (superposition de courbes expérimentales) pour la calculer.

Cet ensemble de courbes expérimentales tracées en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative s'appelle *le diagramme de Moody* (cf. un exemplaire à la fin du poly de cours).

Lecture du diagramme de Moody :

1) Grandeur tracée en abscisse :
   Facile, c'est le nombre de Reynolds.

2) Grandeur tracée en ordonnée :
   C'est un coefficient adimensionné, nommé *coefficient de perte de charge* (Friction Factor en anglais), le terme 'perte de charge' devant être considéré comme un synonyme de 'chute de pression'. Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur les significations précises de ce vocabulaire.
   Par ailleurs, nous montrerons plus tard que *la pression est une forme d'énergie volumique stockable* par le fluide, au même titre que les énergies de type mécanique (cinétique, potentielle de pesanteur) déjà connues pour le point matériel ou le solide.

Expliquons comment l'on peut construire la définition de ce coefficient :

- En se référant à une formule de thermo PCSI $\delta W = -P\, dV$, on voit que la pression est homogène à une énergie volumique
- On cherche alors une énergie volumique de référence pour la comparer à la chute de pression. La plus évident est l'énergie cinétique volumique de l'écoulement $e_c = \frac{1}{2}\rho U^2$
- La chute de pression étant proportionnelle à la longueur L de la conduite, il est intéressant d'exprimer le coefficient de perte de charge par unité de longueur de conduite. Pour adimensionner le coefficient de perte de charge, il ne reste donc plus qu'à multiplier par le diamètre de la conduite.

Conclusion : Le coefficient de perte de charge représente la chute linéique de pression, mais adimensionnée !

3) <u>Paramètre permettant de distinguer les différentes courbes</u>

C'est la *rugosité relative* du matériau constitutif de la conduite. La 'rugosité absolue' étant un ordre de grandeur de la profondeur des aspérités sur la surface interne de la conduite. Une fois rapportée au diamètre de la conduite, elle devient la 'rugosité relative'.

✪ Démontrer par le calcul que le coefficient de perte de charge vaut $64/R_e$ en régime laminaire.

✪ Expliquer comment déterminer la chute de pression sur le diagramme de Moody, la conduite, le fluide et le débit volumique étant connus

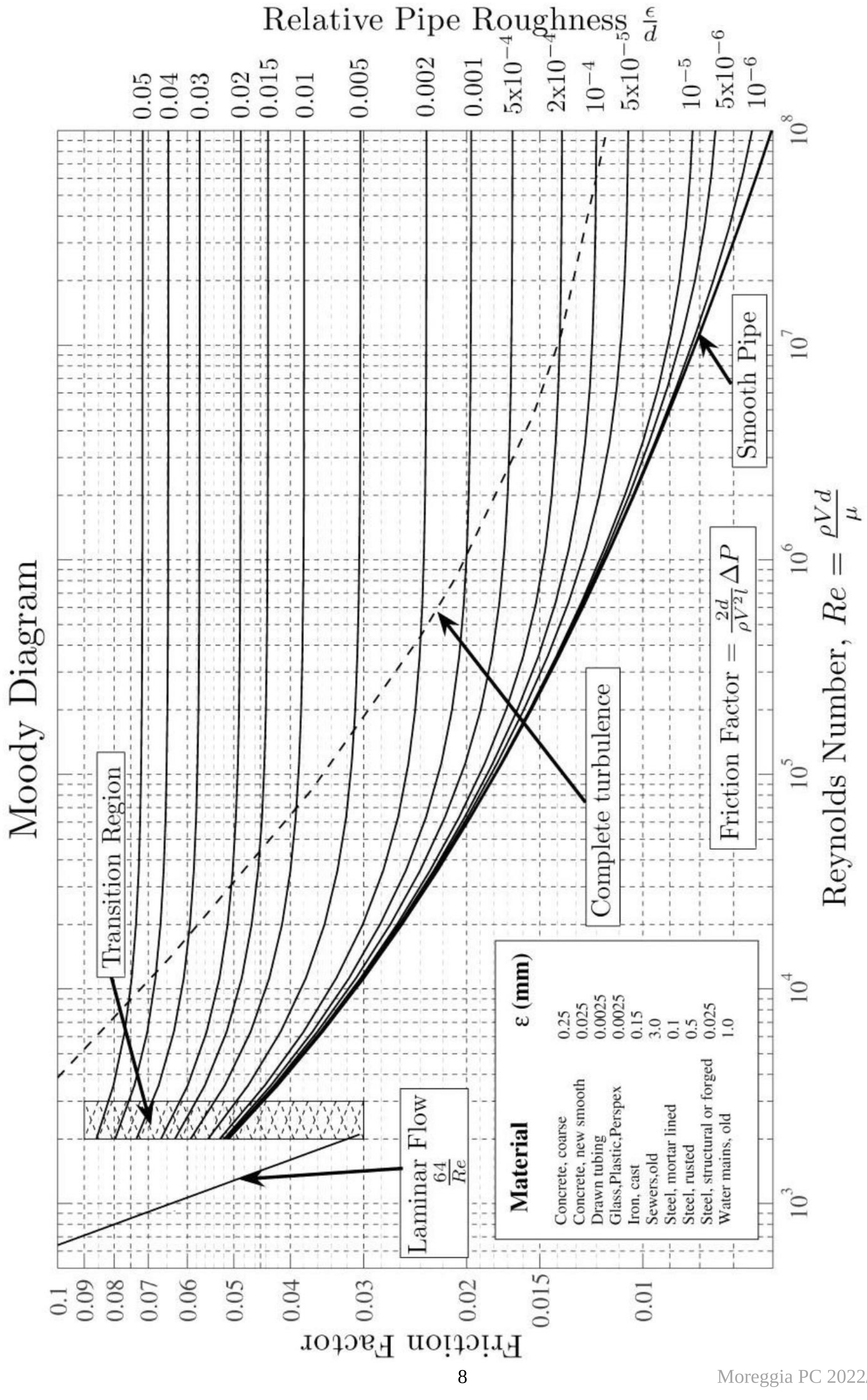
<u>Remarques sur la notion de « régime stationnaire en régime turbulent »</u> (à lire sans vous casser la tête)

Il n'est pas impossible qu'un énoncé de concours puisse mentionner un écoulement qui soit à la fois stationnaire et turbulent. Cela dépend de ce que l'on entend par « stationnaire ». Il est évident que la définition que l'on en a donnée est incompatible avec la turbulence, mais on peut adapter cette définition au cas turbulent. Cette possibilité est nécessairement employée lorsque l'on trace 'le profil des vitesses en régime turbulent' (cf. figure page 6 du poly, tirée d'un bouquin).

En régime turbulent, il s'avère que la vitesse fluctue dans le temps autour d'une valeur moyenne, qui – elle – est stationnaire lorsque les contraintes imposées par l'expérimentateur sont constantes dans le temps (forme de la conduite, pression aux extrémités). Dire que « la valeur moyenne est stationnaire » signifie que l'on effectue la moyenne sur une certaine durée (disons 1 seconde) et que l'on regarde comment cette moyenne évolue au cours du temps (moyenne calculée toutes les secondes pendant une minute, par exemple).
On peut retenir qu'une moyenne tend à atténuer les effets des fluctuations. C'est un fait assez général en physique. Il faut pour cela intégrer sur une échelle (temporelle dans le cas étudié) suffisamment grande devant la période caractéristique des fluctuations (NB : cela reste vrai si l'on est confronté à des fluctuations spatiales, comme des parasites sur une image par exemples).

<u>Vidéos DVD mécaflu + Manips</u> :

- *Manip du robinet : transition laminaire / turbulent*
- *Vidéos laminaire / turbulent dans conduite : expérience de Reynolds*
- *Vidéo manip visualisation perte de charge dans une conduite (eau colorée)*
- *(Courbes de pompe sur Google Image)*


Moody Diagram
Relative Pipe Roughness $\frac{\epsilon}{d}$
0.05
0.04
0.03
0.02
0.015
0.01
0.005
0.002
0.001
$5\text{x}10^{-4}$
$2\text{x}10^{-4}$
10^{-4}
$5\text{x}10^{-5}$
10^{-5}
$5\text{x}10^{-6}$
10^{-6}
Friction Factor
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.015
0.01
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
Reynolds Number, $Re = \frac{\rho V d}{\mu}$
Transition Region
Laminar Flow $\frac{64}{Re}$
Complete turbulence
Smooth Pipe
Friction Factor $= \frac{2d}{\rho V^2 l} \Delta P$
Material ε (mm)
Concrete, coarse 0.25
Concrete, new smooth 0.025
Drawn tubing 0.0025
Glass,Plastic,Perspex 0.0025
Iron, cast 0.15
Sewers,old 3.0
Steel, mortar lined 0.1
Steel, rusted 0.5
Steel, structural or forged 0.025
Water mains, old 1.0