

Mécanique – TD3 : Aspects énergétiques de la dynamique

Conseils : Lorsque l'on souhaite utiliser un théorème énergétique, s'il existe au moins une force conservative qui travaille, utiliser le TEM plutôt que le TEC. Cela évite de calculer le travail des forces conservatives, en utilisant sans les redémontrer les expressions des énergies potentielles que l'on connaît.

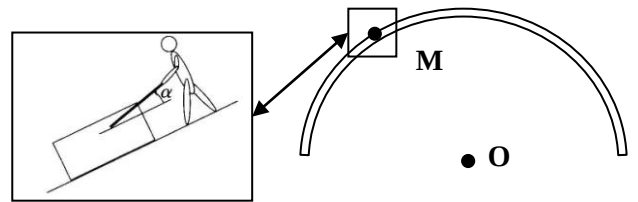
Exercice 1 : Travail d'une force de frottement solide

On considère un point matériel M pouvant se déplacer le long de l'axe (Ox) dans un référentiel lié à (Ox). Il est soumis à une force constante $-F_0 \vec{e}_x$ s'il se déplace dans le sens des x croissants, et à une force $F_0 \vec{e}_x$ s'il se déplace dans le sens des x décroissants.

1. Déterminer le travail de la force pour aller directement du point A(x = 1) au point B(x = 3).
2. Déterminer le travail de la force pour aller du point A(x = 1) au point B(x = 3) en passant par le point C(x = 4).
3. La force considérée est-elle conservative ? Si oui, déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.

Exercice 2 : Travail d'une force de traction

Un homme tire un traîneau de bas en haut d'une colline dont on assimilera la forme à un demi-cercle de rayon R, de centre O. Il exerce une force de traction $\vec{T}$ constante en norme et faisant un angle α constant avec le sol de la colline. On assimilera le traîneau à un point matériel M.



1. Définir le repère le plus approprié pour repérer la position du point M sur le demi-cercle.

Indices

2. On va calculer le travail de la force de traction entre le bas et le sommet de la colline.
 - 2.1. Exprimer le vecteur vitesse en fonction des coordonnées introduites à la question 1.
 - 2.2. En déduire l'expression de $d\vec{OM}$ en fonction de $d\theta$.
 - 2.3. Calculer alors le travail de la force de traction depuis le bas de la colline jusqu'à son sommet.

Exercice 3 : Energie potentielle gravitationnelle - Satellite terrestre

On considère le mouvement d'un satellite en orbite *circulaire* autour de la Terre. La Terre est assimilée à un point matériel T de masse M, et le satellite est assimilé à un point matériel S de masse m. On considère le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique (galiléen) lié au point T.

1. Définir sur un schéma le repère approprié pour repérer la position du satellite.
2. Etablir l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle. Pour cela :
 - on considère la force de gravitation de manière générale : $r(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions du temps
 - on exprimera d'abord le vecteur vitesse en fonction de $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$
 - puis on exprimera le trajet élémentaire en fonction de dr et $d\theta$
 - et on prendra une énergie potentielle nulle à l'infini.
3. A l'aide du PFD, calculer la vitesse v_1 (respectivement v_2) que doit posséder le satellite pour être sur l'orbite de rayon r_1 (respectivement r_2). Ici, r_1 et r_2 sont constants puisque les orbites sont stables.
4. Calculer la valeur de l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite de rayon r_1 puis sur celle de rayon r_2 .
5. Calculer la variation d'énergie mécanique nécessaire pour passer de l'orbite de rayon r_1 à celle de rayon r_2 . Interpréter simplement le résultat ($r_2 > r_1$).

Exercice 4 : Mouvement d'une luge

Une luge M de masse m glisse sans frottement sur une piste, représentée par un plan incliné de longueur L faisant un angle α avec l'horizontale. Arrivée en bas, elle continue son trajet sur un plan horizontal où elle est freinée par une force de frottement solide. La luge démarre avec une vitesse nulle au point A. La position de M est repérée lors de la première phase par la variable x_1 :

$$\overrightarrow{AM} = x_1 \vec{e}_{x_1},$$

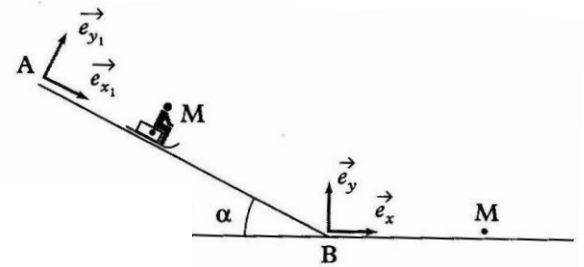
et lors de la deuxième phase par la variable x :

$$\overrightarrow{BM} = x \vec{e}_x.$$

1. Déterminer à l'aide d'un théorème énergétique l'équation différentielle du mouvement de la phase de glissement sur le plan incliné (phase 1). Déterminer la vitesse en B à partir d'un théorème énergétique.

Indice

2. Déterminer à l'aide d'un théorème énergétique l'équation différentielle du mouvement de la phase de freinage sur le plan horizontal (phase 2). Déterminer la distance d'arrêt D.



Exercice 5 : Tri postal

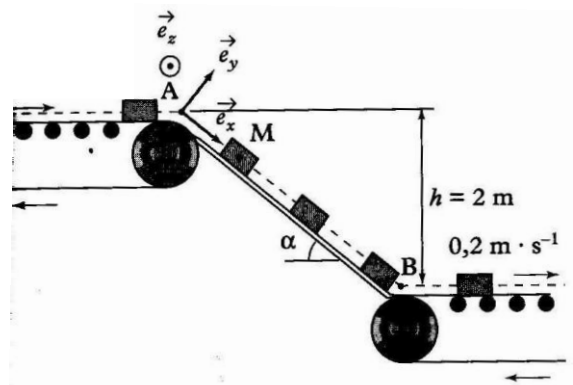
On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $V_A = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Les colis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale.

Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est $f = 0,4$. Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis roulant avance à la vitesse $V_B = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

Donner l'expression puis la valeur numérique de l'angle α qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.

Indice.



Exercice 6 : Energie potentielle et positions d'équilibre

Un anneau de masse m peut coulisser sans frottements sur un cercle rigide de rayon R . On assimile l'anneau à un point matériel. A ce point matériel est fixée l'une des extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , dont l'autre extrémité est attachée au point A du cercle. L'ensemble est disposé verticalement comme indiqué sur la figure.

On cherche à déterminer les positions d'équilibre, et à discuter de leur stabilité.

1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle du point matériel en fonction de θ . On prendra l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en A.

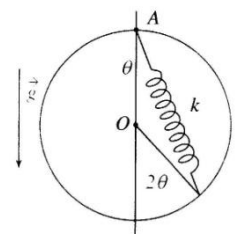
2. Montrer que l'on peut exprimer l'énergie potentielle sous la forme :

$$E_p = 2kR^2 [(\alpha - \cos \theta)^2 - \beta \cos^2 \theta]$$

On donnera l'expression des constantes α et β .

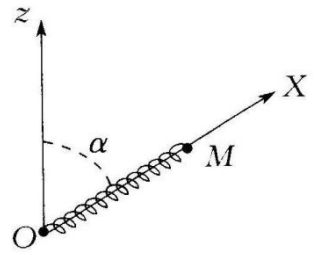
3. Discuter des positions d'équilibre et de leur stabilité en fonction des valeurs de α et β .

4. En utilisant la calculatrice, représenter l'allure de la fonction $E_p(\theta)$ pour différentes valeurs de β , et retrouver qualitativement les résultats établis à la question 3.



Exercice 7 : Anneau sur une tige avec ressort - Discussion énergétique

On considère une tige fixe dans un plan vertical (xOz), faisant un angle α avec la verticale (Oz). Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée en O . On repère la position de M par la coordonnée cartésienne $OM = X$.

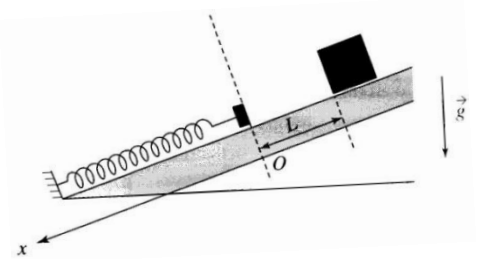


1. Quelles sont les forces conservatives appliquées à M ? Déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de X et α .
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
- 3.1. Etudier la fonction $E_p(X)$ dans le cas où $mg \cos \alpha < kl_0$. Tracer son allure.
- 3.2. Discuter sur le graphique les mouvements possibles en prenant à $t = 0$ les conditions initiales suivantes :
$$X = l_0 \quad \text{et} \quad dX/dt = V_0$$

Préciser la valeur maximale de V_0 pour que le mouvement se fasse entre deux positions extrêmes $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.
- 3.3. Déterminer les fonctions $V(X)$ et $X(t)$ dans les conditions de la question précédente.

Exercice 8 : Rebond sur un ressort

On abandonne sans vitesse initiale un palet de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. Le palet glisse alors sans frottements selon la ligne de plus grande pente sur une distance L , avant de rencontrer un butoir solide d'un ressort de raideur k , disposé comme indiqué sur la figure.



1. Par un raisonnement énergétique, déterminer la compression maximale du ressort au cours du rebond.
Indice.
2. On recherche à présent la position du palet pour laquelle sa vitesse est maximale.
 - 2.1. Cette position peut-elle correspondre à $x = 0$? Pourquoi la vitesse maximale est-elle en fait atteinte un peu plus loin ? Donner, sans calculs superflus, l'abscisse de cette position.
Indice.
 - 2.2. Retrouver cette position par un raisonnement énergétique, ainsi que la vitesse maximale atteinte.
Indice.

Exercice 9 : Mouvements possibles d'un pendule à fil souple

Un point matériel est fixé à l'extrémité d'un fil souple idéal, dont l'autre extrémité est fixée en un point O fixe dans le référentiel galiléen d'étude. Le point matériel est initialement au repos, situé verticalement sous le point O . On lui communique à l'instant initial une vitesse de norme v_0 et dirigée horizontalement. On étudie les différents mouvements possibles du pendule selon la valeur de v_0 . A l'aide d'un théorème énergétique et de la RFD, établir que :

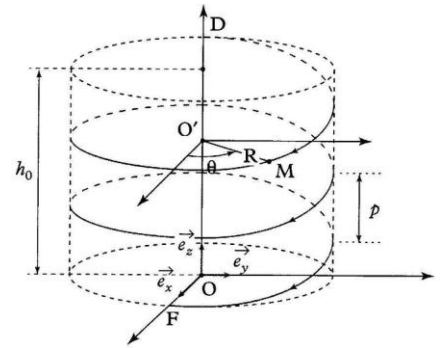
- si $v_0 < \sqrt{2g\ell}$, le pendule effectue des oscillations.
- si $\sqrt{2g\ell} < v_0 < \sqrt{5g\ell}$, il y a changement de nature du problème, la tension du fil s'annulant.
- si $v_0 > \sqrt{5g\ell}$, le mouvement est révolutif (de type fronde).

Indice

Exercice 10 : Toboggan aquatique

On étudie le mouvement d'un baigneur dans un toboggan aquatique hélicoïdal. Ce baigneur est modélisé par un point matériel M de masse m glissant sans frottement sur une hélice de rayon $R = 2m$ et de pas constant p . Il s'élance du départ (point D) avec une vitesse nulle et quitte le toboggan au point F après un dénivelé $h_0 = 5m$ et $n = 2,5$ tours effectués. Le point M est repéré grâce à ses coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases}$$



1. On appelle α l'angle de la pente du toboggan par rapport au plan horizontal. Exprimer p en fonction de α et R , puis α en fonction de h_0 et n .
2. A l'aide d'un théorème énergétique écrire l'équation différentielle du mouvement du baigneur.
3. Déterminer le temps de glissade (de D à F).
4. Déterminer la vitesse du baigneur au point F à l'aide de deux méthodes.

Exercice 11 : Energie potentielle en chimie - Liaison chimique de la molécule HCl

Une molécule de HCl est modélisée par deux atomes H et Cl, séparés par une distance r sur un axe fixe dans le référentiel galiléen d'étude ; l'atome de Cl est supposé fixe et pris comme origine du repère. L'atome H, assimilé à un point matériel, est soumis à l'action de la force de liaison chimique qui dérive d'une énergie potentielle :

$$E_p(r) = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r}$$

1. Tracer l'allure de l'énergie potentielle en fonction de r , C et K étant des constantes positives. On pourra s'aider de la calculatrice en prenant $C = 10^{-12}$ et $K = 0,1$. Discuter graphiquement des positions d'équilibre et de leur stabilité. Interpréter simplement le résultat obtenu concernant la molécule HCl.
2. Déterminer par le calcul la position d'équilibre r_0 . En utilisant les valeurs de C et K données précédemment, déterminer par le calcul si la position d'équilibre est stable.
3. Déterminer l'expression littérale de l'énergie de dissociation de la molécule HCl, i.e. l'énergie qu'il faut fournir à H pour qu'il ne soit plus lié à l'atome Cl.

Quelques indices pour vous permettre de poursuivre si vous êtes bloqués

- Ex2 : Repère polaire d'origine O. Noter que la direction de la force fait alors un angle α avec la direction orthoradiale $\vec{e}_\theta$.
- Ex4 : résultat est $v_B^2 = 2Lg \sin \alpha$
- Ex5 : Appliquer le TEM entre les points A et B. On obtient une relation entre la vitesse en A, celle en B, l'angle α et la hauteur h du dispositif. Il reste une inconnue : la réaction normale. La déterminer avec la RFD.
- Ex8 : Pensez à distinguer deux phases du mouvement (avant et après la mise en contact avec le ressort)
 - 1. TEM : Energie mécanique se conserve. L'exprimer en fonction de la vitesse et de la position. A tout instant, l'énergie mécanique est égale à sa valeur à $t = 0$, que l'on peut calculer. On peut alors calculer x lorsque la vitesse s'annule, ce qui correspond à la compression max du ressort.
 - 2.1. Réfléchir en se basant sur la RFD selon l'axe (Ox)
 - 2.2. Utiliser le TEM. L'énergie cinétique est maximale quand la vitesse est maximale, ce qui correspond au minimum d'énergie potentielle.
- Ex9 :
 - chercher pour quel angle la vitesse s'annule. A quelle condition sur v_0 cela n'arrive jamais ?
 - Pour quel angle la tension du fil s'annule ? Conditions sur v_0 pour que cela n'arrive jamais ?
 - le mouvement est oscillant si la vitesse s'annule avant la tension du fil.
 - le mouvement change de nature si la tension du fil s'annule avant la vitesse.
 - le mouvement est révolutif si la vitesse ne peut jamais s'annuler.