

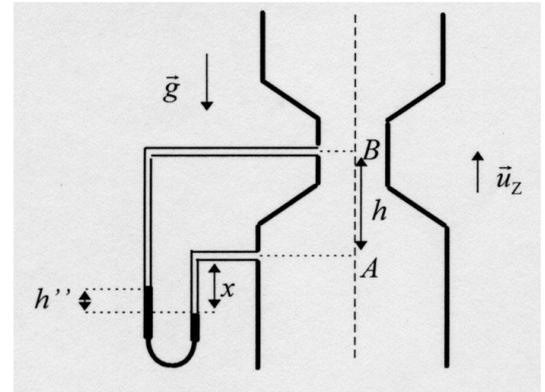
Exercices – Ecoulement parfait : Bernoulli

Exercice 1 : Jauge de Venturi verticale

Traiter un exemple du cours dans une situation légèrement différente
Relier la dénivellation du mercure aux pressions dans la jauge

Une jauge de Venturi est constituée d'une conduite de section circulaire, de surface S_A (diamètre d_A) qui présente un rétrécissement de section S_B (diamètre d_B). De l'eau s'écoule dans la jauge.

On mesure, à l'aide d'un tube en U contenant du mercure, la différence de pression entre A et B. La dénivellation du mercure est h'' .



En-dehors de la canalisation principale (donc dans le tube en U et les tubes horizontaux), les fluides (eau et mercure) sont statiques.

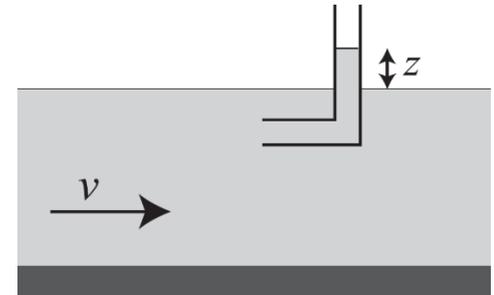
Déterminer la vitesse de l'eau en A et le débit à travers la jauge. On assimilera l'eau à un fluide parfait et incompressible en écoulement stationnaire.

Données : $h'' = 35,0 \text{ cm}$; $d_A = 30,0 \text{ cm}$; $d_B = 15,0 \text{ cm}$; $\rho(\text{Hg}) = 13\,600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Exercice 2 : Débitmètre

Une façon simple de mesurer le débit d'un écoulement à l'air libre
Repérer seul la présence d'un point d'arrêt dans l'écoulement

Dans une rivière, le champ de vitesse est horizontal, supposé uniforme près de la surface $\vec{v} = v\vec{e}_x$, et l'eau est assimilée à un fluide parfait. On y plonge un tube coudé de section uniforme S , qui descend à la profondeur d et qui dépasse la surface libre de la rivière d'une hauteur H . L'axe z ascendant a pour origine la surface libre de la rivière.



1. Faire un schéma. Dans un premier temps, on suppose que l'eau monte dans le tube jusqu'à la hauteur $z < H$ au-dessus de la surface de la rivière. Etablir la relation entre v et z .

2. A partir de quelle vitesse critique v_c d'écoulement de la rivière un jet d'eau peut-il se former au-dessus du tube ? Jusqu'à quelle hauteur h' (au-dessus de la rivière) ce jet monte-t-il ?

3. En supposant que le jet d'eau est vertical à sa base, et que les lignes de courant sont toutes parallèles, quelle est la vitesse de l'eau à la sortie du tube ? Quelle est alors la vitesse de l'eau dans le tube ?

Exercice 3 : Vase de Mariotte

Une clepsydre simple d'utilisation pour tester si l'on a compris Torricelli

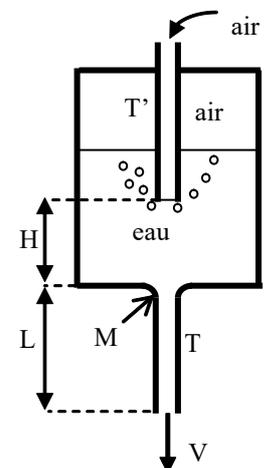
On considère le dispositif de la figure ci-contre, contenant de l'eau.

Le tube T , de longueur L laisse s'écouler l'eau ; le tube T' , qui a son orifice inférieur à une hauteur H au-dessus de T , laisse passer l'air depuis l'atmosphère de pression p_0 .

1. Exprimer la vitesse de sortie V de l'eau lorsque le niveau d'eau est au-dessus de l'orifice inférieur de T' , en fonction de g , L et H . Dépend-elle de la hauteur d'eau ?

2. Expliquer en quoi le tube T' permet-il au dispositif d'être une clepsydre simple d'utilisation (pour la mesure du temps)

3. Que se passe-t-il si la hauteur d'eau située au-dessus de la sortie du tube T' est supérieure à 10 m ?



Exercice 4 : Vidange d'un réservoir fermé

Vidange d'un réservoir hermétiquement fermé à l'air ambiant

Gérer une condition à la limite plus compliquée qu'à l'air libre

Faire preuve d'initiative en faisant une hypothèse sur une transformation

Une bonbonne cylindrique est remplie à moitié d'eau, la hauteur d'eau étant $H_0 = 10 \text{ cm}$ et le volume d'eau $V_0 = 2 \text{ L}$. Au-dessus de l'eau se trouve de l'air à pression atmosphérique. Le haut de la bonbonne est hermétiquement fermé, l'air extérieur ne peut y pénétrer. La bonbonne possède un robinet de vidange en bas sur le côté, préalablement fermé. On ouvre le robinet à l'instant $t = 0$.

1. Expliquer pourquoi l'eau ne va pas entièrement s'écouler

2. Quel volume d'eau s'écoule avant immobilisation ?

Réponse : $V_{ec} = 20 \text{ cm}^3$

Extrait CCINP PC 2020 : Mécanique du vol d'un avion

- Comprendre qq éléments du vol d'un avion grâce à la mécanique des fluides

- Essentiellement s'approprier les données de l'énoncé

La **figure 1** représente un schéma simplifié des principales caractéristiques géométriques du profil d'une aile d'avion. L'extrados est la surface supérieure du profil et l'intrados est la surface inférieure du profil. La distance L entre le bord d'attaque et le bord de fuite est appelée corde du profil.

On travaille dans le référentiel de l'aile. Dans ce référentiel, loin de l'aile, la vitesse de l'air est notée \vec{v}_∞ . L'angle entre la corde et \vec{v}_∞ est l'angle d'incidence i . La vitesse de l'avion par rapport à l'air est notée \vec{V}_a avec $V_a = \|\vec{V}_a\| = \|\vec{v}_\infty\| = v_\infty$.

Dans cette partie, la vitesse de l'avion sera suffisamment faible devant la célérité du son dans l'air pour considérer l'air en écoulement incompressible.

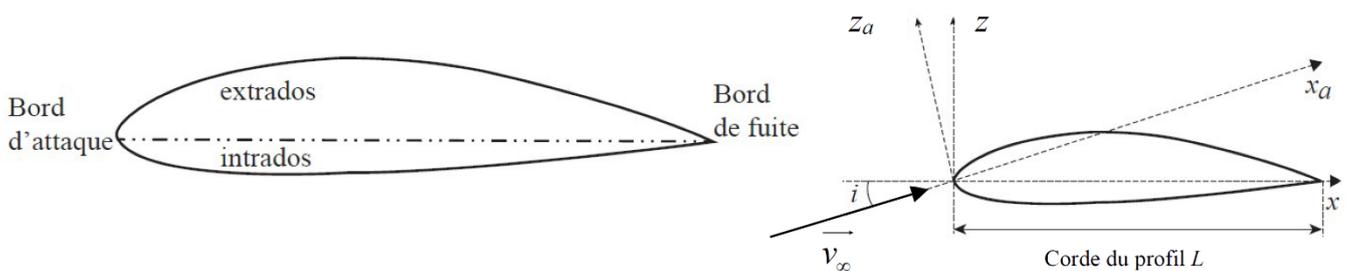


Figure 1 - Caractéristiques géométriques du profil d'une aile d'avion

I.1 - Généralités

- Q1.** Définir la notion de ligne de courant associée aux particules de fluide. Est-ce une description de nature eulérienne ou lagrangienne ?
- Q2.** Dans la **figure 2** sont représentées les lignes de courant pour un profil donné. En analysant ces lignes de courrant, expliquer pourquoi l'écoulement stationnaire de l'air, supposé parfait, homogène et incompressible, génère une force de portance de l'avion.

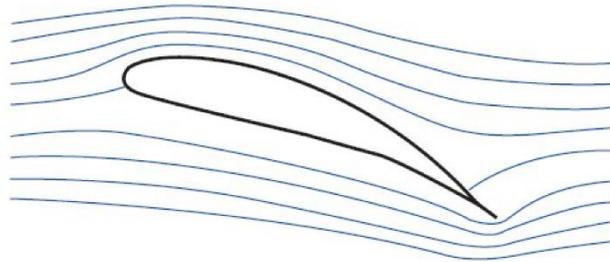


Figure 2 - Lignes de courant autour du profil d'une aile d'avion

- Q3.** En pratique, pour étudier la répartition de pression P le long de l'intrados et de l'extrados, on définit une pression adimensionnée appelée coefficient de pression :

$$C_P = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \cdot \rho_\infty \cdot v_\infty^2},$$

où P_∞ , ρ_∞ et v_∞ sont respectivement la pression, la masse volumique et la vitesse de l'écoulement incident loin de l'aile. On représente C_P pour l'intrados et l'extrados en fonction de x/L la position par rapport à la corde (**figure 3**). Justifier à quelle courbe, C_{P1} ou C_{P2} , on associe l'intrados et l'extrados.

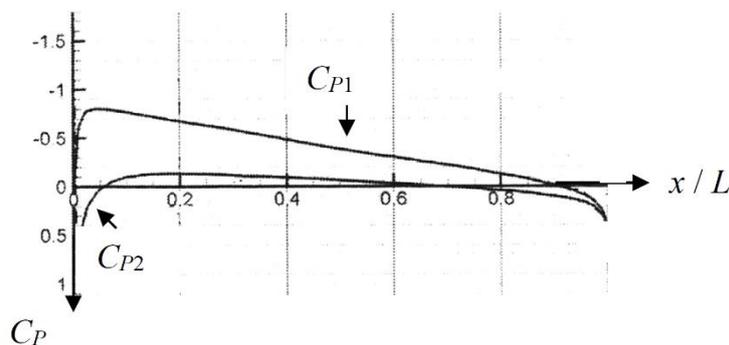


Figure 3 - Coefficient de pression sur l'intrados et l'extrados

- Q4.** Pourquoi observe-t-on toujours $C_P \leq 1$?

Par intégration de la différence des coefficients de pression entre intrados et extrados sur toute la corde du profil, on obtient le coefficient de portance, adimensionné,

$$C_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2} \cdot S_{réf} \cdot \rho_\infty \cdot v_\infty^2},$$

avec $S_{réf}$ la surface de l'aile et F_z , la force de portance exercée sur l'aile. Cette force de portance est perpendiculaire à l'écoulement (**figure 4**). Par ailleurs, la répartition de pression le long de l'intrados et de l'extrados ne se traduit pas uniquement par la force de portance F_z qui est perpendiculaire à l'écoulement, mais également par la présence d'une force de traînée

$F_x = \frac{1}{2} \cdot C_x \cdot S_{réf} \cdot \rho_\infty \cdot v_\infty^2$, parallèle à l'écoulement et qui s'oppose au déplacement (**figure 4**). C_x est le coefficient de traînée.

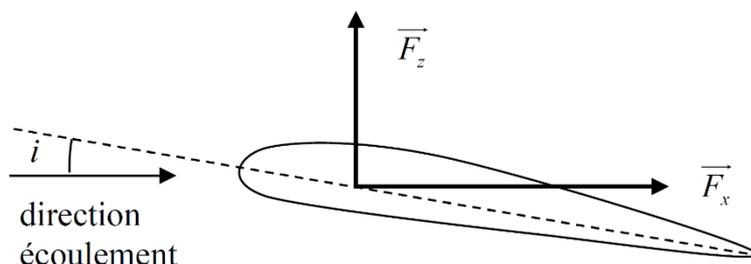


Figure 4 - Décomposition des efforts aérodynamiques : portance et traînée

Q5. Vérifier que le coefficient de portance C_z est adimensionné.

L'influence de l'angle d'incidence i sur le coefficient de pression C_P est représentée en **figure 5**.

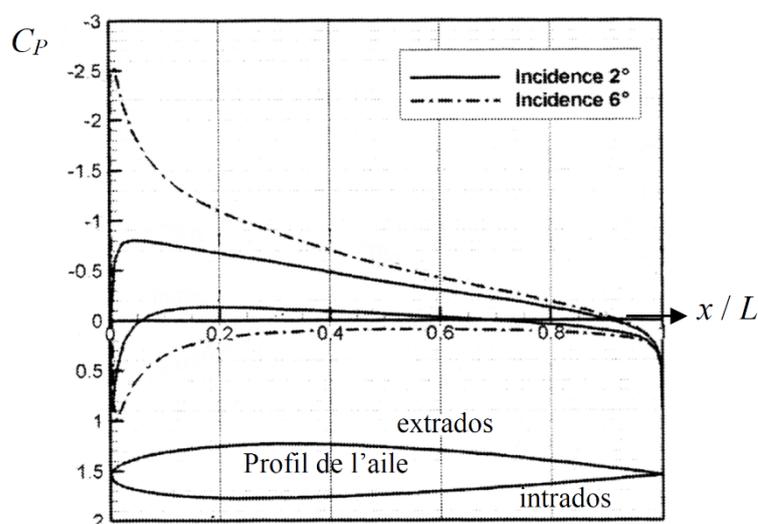


Figure 5 - Influence de l'incidence sur le C_P

- Q6.** Le coefficient de portance C_z est-il plus important pour une incidence de 2° ou 6° ? Justifier.
- Q7.** Le pilote peut faire varier la surface des ailes en actionnant des surfaces mobiles, les volets. En phase de décollage, indiquer et justifier la configuration que le pilote va choisir : volets rentrés ou sortis ?
- Q8.** On considère un vol en palier, c'est-à-dire avec un vecteur vitesse et une altitude de l'avion constants. Représenter l'ensemble des forces s'exerçant sur l'avion et expliquer comment la force de traînée est compensée.
- Q9.** Pourquoi est-il intéressant de voler à haute altitude ?
- Q10.** Dans cette question, on se propose d'interpréter physiquement ce que les professionnels de l'aéronautique appellent la finesse $f = \frac{C_z}{C_x}$ d'une aile. Pour cela, on considère la situation d'un avion, tous moteurs coupés, ayant un mouvement de translation rectiligne uniforme descendant. On note α l'angle entre la direction de l'écoulement de l'air autour de l'avion et l'horizontale (**figure 6**). À l'aide d'une représentation des forces sur le schéma de la **figure 6**, établir le lien entre la finesse f et l'angle α . De quelle distance d_H l'avion a-t-il avancé à l'horizontale lorsqu'il a perdu une altitude d_V ? Conclure sur le sens physique de la finesse.

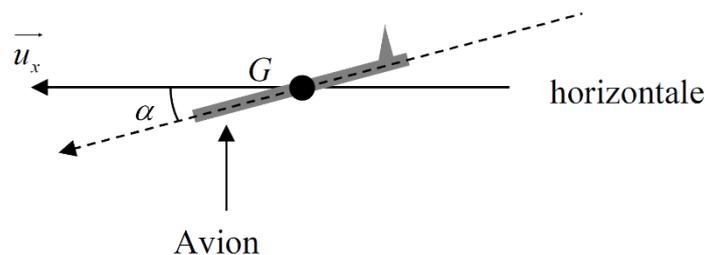


Figure 6 - Avion en mouvement rectiligne uniforme sans propulsion

Pour apprécier la qualité d'une aile on trace la polaire de l'aile qui est la courbe de son C_z en fonction de son C_x (**figure 7**).

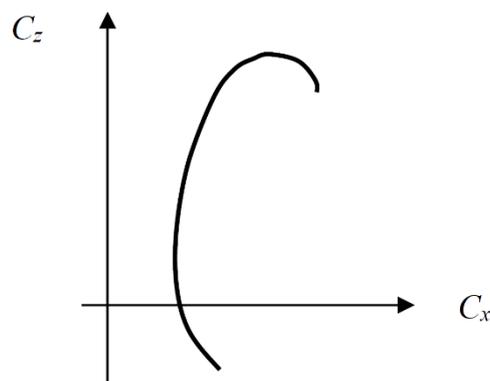


Figure 7 - Polaire d'une aile

Q11. Reproduire l'allure de la polaire d'une aile sur votre copie et indiquer les points correspondant respectivement à une traînée minimale, une portance maximale et une finesse maximale.

Q12. Quand on va du point pour lequel la traînée est minimale vers le point pour lequel la portance est maximale, comment évolue l'angle d'incidence ?

Extrait MPonts PSI 2006 : Micro-centrale hydraulique

Etudier un dispositif industriel

Etudier le phénomène de cavitation

S'entraîner sur un sujet de concours

La centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant D , dite *conduite forcée*, issue du barrage (Fig. 1). La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée A, est reliée à une tubulure de section décroissante, appelée *injecteur*.

L'axe vertical repérant l'altitude z est orienté vers le haut. L'altitude du point A est, par convention, nulle ; on note H la dénivellation entre la surface libre de l'eau et l'axe de l'injecteur et h la différence de niveau entre l'entrée de la conduite et la sortie, en A (la différence de niveau entre la surface libre et l'entrée de la conduite est donc $h' = H - h$). L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible et de masse volumique μ ; elle sort de l'injecteur à l'air libre, sous la pression atmosphérique P_0 , supposée indépendante de l'altitude. Le jet est cylindrique d'axe horizontal et de section circulaire de diamètre D dans la conduite puis d dans l'injecteur. Ce jet frappe la turbine et l'anime d'un mouvement de rotation. On considère les écoulements comme permanents et irrotationnels. On néglige tout frottement. On néglige les variations avec l'altitude de l'accélération de la pesanteur g .

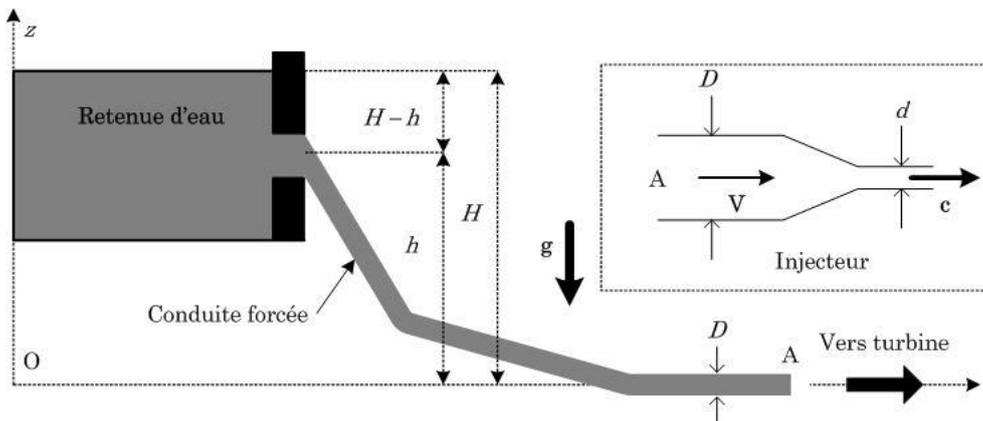
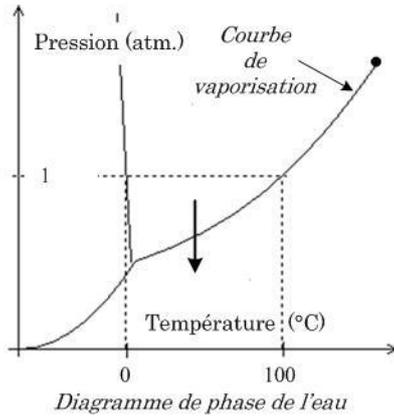


Fig. 1 - Retenue et conduite forcée pour installation hydroélectrique. L'injecteur, en A, est schématisé dans le rectangle en pointillés.

Données : $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $D = 60 \text{ cm}$, $H = 300 \text{ m}$ et $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

I – Conduite forcée

- 1 – Dans cette question — et dans cette question seulement — on suppose que l'extrémité aval de la conduite n'est pas reliée à l'injecteur ; l'eau sort à l'air libre au point A. En justifiant l'utilisation de la relation de Bernoulli entre le point A et un point quelconque de la canalisation et en considérant la conservation du débit, exprimer la pression $P_1(z)$ à l'intérieur de la conduite sous la forme



$$P_1(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right), \text{ avec } z_0 = \frac{P_0}{\mu g}.$$

Calculer z_0 .

La pression de vapeur saturante de l'eau à la température ambiante est $P_{\text{sat}} \approx 3 \times 10^3 \text{ Pa}$.

Montrer qu'au-delà d'une certaine altitude, à préciser, ce modèle de pression n'est plus applicable. Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbation (attaque des matériaux, bruits ...).

- 2 – Pour pallier cet inconvénient, on visse en A sur la partie finale horizontale de la conduite un injecteur (encart de la Fig. 1) de section décroissante et de diamètre de sortie $d < D$. Montrer que la vitesse en sortie de l'injecteur, notée c , est $c = \sqrt{2gH}$ (relation de Torricelli). Calculer c .

Établir que la vitesse en A est $V = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2gH}$.

- 3 – Exprimer la pression $P_2(z)$ à l'intérieur de la conduite munie d'injecteur. On admet que l'entrée de la conduite est pratiquement à l'altitude H . Montrer que les phénomènes de cavitation disparaissent dans toute la conduite si d est inférieur à un certain d_0 dont on établira l'expression en fonction de D, P_0, H, g et μ . Vérifier que $d_0 \approx 26 \text{ cm}$.

- 4 – Le diamètre de sortie de l'injecteur est $d = 12 \text{ cm}$. La vitesse réelle du jet en sortie de l'injecteur est $c' = 74 \text{ m.s}^{-1}$. A quelle dénivellation, notée H' , cette vitesse correspondrait-elle ? Exprimer et calculer le *coefficient de contraction* $C_c = \frac{H'}{H}$. Donner quelques raisons de l'écart à l'unité de ce coefficient.

- 5 – Exprimer et calculer le débit volumique réel q' de l'injecteur *avec pertes*, puis le débit massique D_m (en kg par seconde) en fonction de d , de c' et de μ . Exprimer et calculer la puissance cinétique *réelle* P_c du jet en sortie (débit d'énergie cinétique transportée par le jet, pour la vitesse de sortie c' et le débit associé q').

- 6 – Justifier que l'on nomme *puissance potentielle* la quantité $P_{\text{pot}} = \mu q' g H$. Exprimer et calculer le rendement de la conduite $\eta = \frac{P_c}{P_{\text{pot}}}$ en fonction de C_c .

Extrait CCP PC 2012 : Vase de Tantale, oscillateur de relaxation mécanique

Etude d'un exemple d'oscillateur mécanique, sans basculement de pièces mécaniques

On notera ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur, et l'on prendra pour valeurs numériques : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

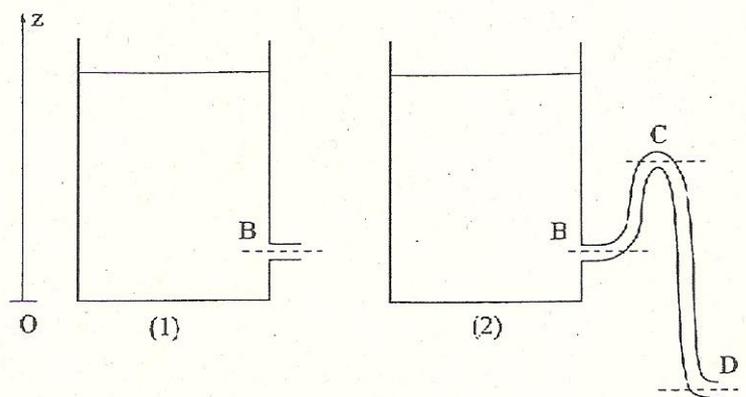


Figure I.1

I.1. Vidange d'un réservoir :

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S . Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (voir figure I.1 à gauche). Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h et percé d'un orifice situé au niveau du point B à hauteur z_B . Cet orifice possède une section droite σ .

On nomme D_s le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir et l'extrémité de l'orifice sont en contact avec l'air, à la pression atmosphérique $P_0 = 1 \text{ bar}$. Tous les écoulements considérés sont assimilés à des écoulements non visqueux, homogènes, incompressibles et laminaires. La variable de temps est notée t .

I.1.1 On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur $h(t)$ de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement.

Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement.

Quelle relation peut-on écrire entre la vitesse de la surface libre v_A , la vitesse v_B en B, et les sections σ et S ? Justifier.

I.1.2. Enoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de l'une de ces lignes de courant, et déterminer, dans le cadre des hypothèses, et pour des sections droites S et σ quelconques, la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B. Que vaut alors le débit D_s ?

I.1.3. Que vaut la vitesse v_B dans la limite où $\sigma \ll S$?

On conservera l'hypothèse $\sigma \ll S$ pour toute la suite du problème

En déduire l'expression de $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$.

I.1.4. Calculer la valeur numérique du débit D_s lorsque $h = 2 \text{ m}$, $z_B = 0,1 \text{ m}$ et $\sigma = 2 \text{ cm}^2$. Exprimer le résultat dans les unités du système international, puis en litre par seconde (L.s^{-1}).

I.2. Influence du siphon :

Un siphon est une portion coudée de conduite, de section constante σ , dont la hauteur maximale, représentée par le point C de la figure I.1 à droite, se trouve à une hauteur z_C supérieure à la hauteur z_B de l'orifice d'entrée de la conduite. Un siphon peut se trouver dans deux états. Dans l'état amorcé, le siphon ne contient pas d'air, et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'un bout à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se trouve alors en contact avec l'air à pression atmosphérique P_0 . Dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau de l'eau excède z_C .

I.2.1. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit constant D_s , que l'on exprimera en fonction de h , g , σ et de la hauteur d'eau d'un des trois points B, C ou D.

I.2.2. Former une équation différentielle du premier ordre pour l'évolution temporelle de la hauteur $h(t)$ de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé.

1.2.3. Trouver la solution de cette équation différentielle en partant d'une condition initiale $h(0) = h_0 > z_C$. En déduire la durée nécessaire t_1 pour que le siphon se désamorçe.

I.3. Réservoir alimenté :

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i , arrivant par l'orifice A, et qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (figure I.2.).

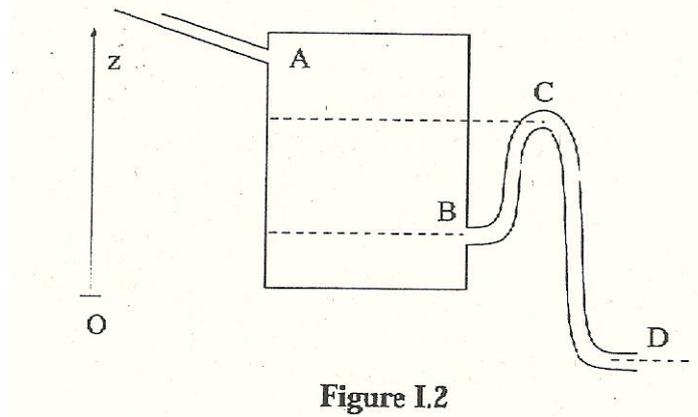


Figure I.2

I.3.1. Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur $h(t)$ en présence du débit D_i , le siphon étant amorcé ?

I.3.2. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire de hauteur h_s constante, que l'on exprimera en fonction de z_D , D_i , σ et g .

Cette solution est-elle acceptable si la valeur de h_s associée à un débit D_i est telle que $h_s < z_B$? Justifier.

I.3.3. Décrire l'évolution de la hauteur $h(t)$ lorsque le siphon est désamorcé.

I.3.4. Montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_c , le système représenté sur la figure I.2. se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction périodique du temps.

Déterminer la valeur de D_c .

I.3.5. On suppose $D_i < D_c$. Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur $h(t)$ en fonction du temps t .