Electromagnétisme Chap.3 –
Electrostatique – Théorème de Gauss

Intro : Les équations de Maxwell sont valides en régimes quelconque. On s'intéresse ici au cas particulier ***statique***, qui est synonyme de « stationnaire » en électromagnétisme (contrairement à la mécanique des fluides). On va voir que les phénomènes électrique et magnétique sont ***découplés***. On étudie ici le champ électrostatique seulement. On va montrer que ***seules les charges électriques sont source du champ électrostatique***. Après avoir fait l'inventaire des propriétés du champ électrique vis-à-vis des ***symétries planes*** *(et **antisymétries planes**)* ainsi que des ***invariances par translation et rotation***, on donnera l'équivalent intégral de Maxwell-Gauss : le ***Théorème de Gauss***. Dans le cas de distributions de charges « hautement symétriques » (donc simples, les seules au programme…), ce théorème est un outil très efficace pour déterminer le champ électrique créé par les charges électriques.

1. Particularisation des équations de Maxwell en statique

1.1. Découplage des phénomènes électriques et magnétiques

- ❖ Montrer qu'en régime statique, les équations de Maxwell sont découplées
- ❖ Montrer que la seule source de champ électrique est la densité de charge
- ❖ Montrer que la seule source de champ magnétique est la densité de courant

1.2. Les charges électriques sont les sources du champ électrostatique

En statique seules les charges sont la cause du champ électrostatique. Les invariances et les symétries planes de la *distribution spatiale de charge* vont donc nous renseigner sur celles du champ électrique créé.

1.3. Les différentes modélisations possibles de la répartition de charges

Dans son état le plus stable, la matière est globalement neutre (atomes, molécules, corps qui nous entourent). Expérimentalement, on peut charger électriquement un corps par frottement, par contact, par influence, mais aussi par une action mécanique (piézoélectricité). La répartition de la charge électrique dans une zone de l'espace peut être modélisée de plusieurs manières :

- distribution ***discrète*** de charges $\{\boldsymbol{q_i}(\vec{\boldsymbol{r}})\}$
- distribution (continue) ***volumique*** $\boldsymbol{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}})$
- distribution (continue) ***surfacique*** $\boldsymbol{\sigma}(\vec{\boldsymbol{r}})$
- distribution (continue) ***linéique*** $\boldsymbol{\lambda}(\vec{\boldsymbol{r}})$

- ❖ Pour chacun de ces modèles de distribution spatiale de charges, et en vous appuyant sur un dessin, donner le lien mathématique entre la charge totale Q répartie dans l'espace et les distributions
- ❖ Une sphère de rayon R est chargée ainsi : $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{2R}\right)$. Calculer la charge totale de la sphère.

2. Conséquences sur le champ $\vec{E}$ des symétries et invariances de la distribution

L'objectif de cette étude est de ***déterminer certaines propriétés du champ <u>avant tout calcul</u>***, en repérant les symétries et invariances de la distribution de charges qui le génère.
La distribution de charge est la ***cause***, et le champ électrostatique créé est ***l'effet produit***.

Les invariances et symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits (Principe de Curie). *Il faut nécessairement **définir un repère** pour pouvoir discuter clairement des invariances et symétrie.*

2.1. Invariance par translation

<u>Définition de l'invariance</u> *<u>(de la distribution)</u>* ***<u>par translation</u>*** *Il y **invariance** de la distribution **par translation selon un axe $\vec{e_z}$**,* *si la **distribution ne dépend pas de la coordonnée z** suivant cet axe.* *Les invariances par translation ne concernent que les distributions <u>infinies</u>.*

<u>Propriété du champ $\vec{E}$</u> *Le champ $\vec{E}$ créé par une distribution invariante par translation possède **la même invariance.***

- ❖ Déterminer la dépendance du champ $\vec{E}(M)$ avec les coordonnées du point M
  - Fil rectiligne infini uniformément chargé
  - (d'autres, vus plus tard : plan infini uniformément chargé, cylindre infini uniformément chargé en volume, ou en surface, etc.)

2.2. Invariance par rotation

***Définition de l'invariance** (de la distribution) **par rotation autour d'un axe** (passant par un point)*

*Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un axe** $\overrightarrow{e_z}$,*
*si la distribution **est identique à elle-même par rotation** autour de cet axe.*

*En coordonnées **cylindriques** d'axe vertical $\overrightarrow{e_z}$, la distribution **ne dépend donc pas de θ**.*

Définition de l'invariance** (de la distribution) **par rotation autour d'un point

*Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un point O**,*
*si la distribution est **identique à elle-même par une rotation quelconque** (angle et axe) autour de O.*

*En coordonnées **sphériques**, la distribution est alors **indépendante de θ et de φ.***

Propriété du champ $\vec{E}$

*Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par rotation possède **la même invariance**.*

- Déterminer la dépendance du champ $\vec{E}(M)$ avec les coordonnées du point M pour les distributions suivantes :
  - Fil rectiligne infini uniformément chargé
  - Particule ponctuelle chargée
  - (autres : plan infini uniformément chargé, cylindre infini uniformément chargé, sphère uniformément etc.)

Conclusion : Utilité des invariances

*Les **invariances** de la distribution de charge par translation et/ou rotation permettent de déterminer*
*la **dépendance du champ $\vec{E}(M)$ avec les coordonnées du point** **M** où il est évalué.*

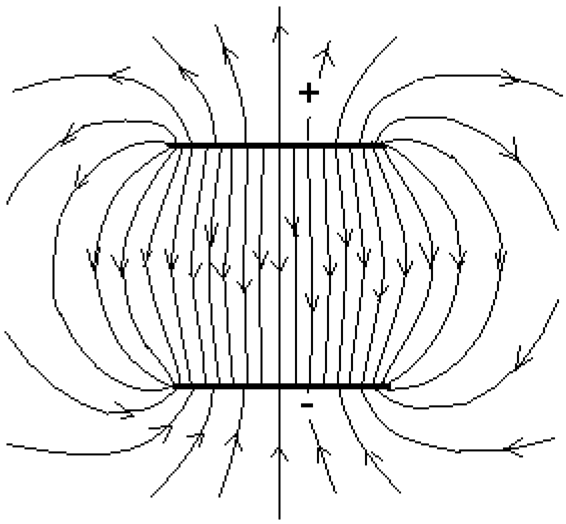
2.3. Symétrie plane

La définition ci-dessous est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

***Définition d'un plan de symétrie** (de la distribution)*

*La distribution admet **un plan de symétrie** **Π**, si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution, **symétrique de P par rapport au plan** **Π***
- *et $\boldsymbol{\rho(P')} = \boldsymbol{\rho(P)}$*

On admet les propriétés du champ électrique vis-à-vis des symétries planes. On remarque leur validité sur l'exemple de la carte de champ généré par un condensateur plan (cf. ci-dessous).



Propriété du champ $\vec{E}$ vis-à-vis d'un plan de symétrie *(de la distribution)*

$$M' = sym_{\Pi}[M] \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(M') = sym_{\Pi}[\vec{E}(M)]}$$

Corollaire

$$\boldsymbol{M \in \Pi} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(M)} \textit{ est } \textbf{\textit{inclus}} \textit{ dans le plan } \Pi$$

Si M *appartient* ***à 2 plans de symétrie,*** $\boldsymbol{\vec{E}(M)}$ *est* ***colinéaire à l'intersection*** *des deux plans.*

Remarque : Ce dernier cas est le plus favorable, car il permet de déterminer complètement la direction du champ.
Remarque : Ce comportement du champ vis-à-vis des plans de (anti)symétrie est celui d'un ***vecteur polaire.***

- Sur les quelques exemples ci-dessous, on considère un point M quelconque dans l'espace. Trouver les plans de symétries de la distribution, en se restreignant aux plans qui contiennent le point M, et en déduire la direction du champ $\vec{E}(M)$:
  - Fil rectiligne de longueur *L* uniformément chargé, puis fil rectiligne infini uniformément chargé.
  - Disque de rayon *R* uniformément chargé, puis plan infini uniformément chargé.
  - Cylindre de hauteur *H* uniformément chargé en volume, puis cylindre infini uniformément chargé
  - Charge ponctuelle, puis sphère uniformément chargée en volume

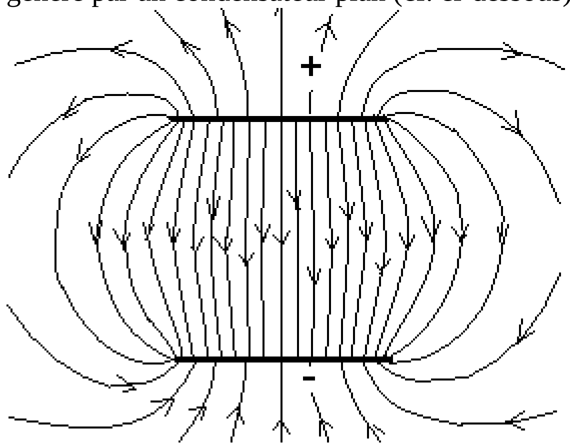
2.4. Antisymétrie plane

La définition ci-dessous est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

Définition d'un plan d'antisymétrie *(de la distribution)*

La distribution admet ***un plan d'antisymétrie*** $\boldsymbol{\Pi_a}$*, si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution,* ***symétrique de P par rapport au plan*** $\boldsymbol{\Pi_a}$
- *et* $\boldsymbol{\rho(P') = -\rho(P)}$

On admet les propriétés du champ électrique vis-à-vis des symétries planes. On remarque leur validité sur l'exemple de la carte de champ généré par un condensateur plan (cf. ci-dessous).



Propriété du champ $\vec{E}$ vis-à-vis d'un plan d'antisymétrie *(de la distribution)*

$$M' = sym_{\Pi_a}[M] \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(M') = -sym_{\Pi_a}[\vec{E}(M)]$$

Corollaire

$$\boldsymbol{M \in \Pi_a} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(M)} \textit{ est } \textbf{\textit{orthogonal}} \textit{ au plan } \Pi_a$$

Remarque : Il suffit d'un seul plan d'antisymétrie pour déterminer la direction du champ en tout point *M* de ce plan. Mais les plans d'antisymétrie sont plus rares en exercice.

Quelques exemples :
- Cylindre rectiligne de longueur L et de section S de charge linéique ρ_0 sur une moitié, $-\rho_0$ sur l'autre
- Doublet de charge : une charge q et une charge $-q$ placées à deux positions différentes

<u>Conclusion : invariances + plans de symétrie</u>

*Repérer les **invariances** permet de déterminer **la dépendance de $\vec{E}(M)$ avec les <u>coordonnées</u>** du point M*
*Repérer les **symétries planes** (ou antisymétries) permet de déterminer **la <u>direction</u> de $\vec{E}(M)$***

3. Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

Lors de l'étude des phénomènes de transport (masse, volume, charge, particules, énergie thermique, etc.), on a montré que tous les débits peuvent s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant. On rappelle que la réciproque est fausse : tous les flux ne sont pas des débits d'une grandeur transportée. C'est notamment le cas du flux du champ électrique à travers une surface.

3.1. *(Rappel)* Orientation d'une surface dans l'espace 3D

On rappelle qu'une surface « finie » peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires. *Chaque surface élémentaire est infiniment petite et peut être assimilée à son plan tangent*. Par conséquent, toutes les surfaces élémentaires sont des plans.
Une surface élémentaire est dite *orientée* lorsque l'on choisit conventionnellement d'orienter son *vecteur normal*. L'écriture suivante n'a de signification précise que si l'on a ***<u>au préalable orienté le vecteur $\vec{n}$ sur un schéma</u>*** :

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$$

où *dS* est l'aire élémentaire.

Orienter une surface finie revient à orienter la surface en tout point : en un point *M* de la surface, on oriente le vecteur normal au plan tangent à la surface. *Il est évident que la convention d'orientation doit être la même en tout point de la surface !!* On rappelle qu'une surface fermée est une surface délimitant un volume. De telles surfaces sont ***toujours conventionnellement orientées vers l'extérieur***.

3.2. *(Rappel)* Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire

*On définit le **flux élémentaire $d\phi$** du champ électrique **à travers la surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$** :*

$$\delta\phi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$$

le champ $\vec{E}$ étant évalué sur la surface élémentaire.

<u>Remarques</u> : Le flux élémentaire est défini à partir d'une surface infiniment petite (élémentaire) : ainsi le champ électrique est *uniforme* à l'échelle de cette surface élémentaire. Peu importe alors où se trouve le point *M* sur cette surface.

<u>Commentaires</u> :
Le flux est une grandeur *<u>algébrique</u>* : son signe indique *<u>le sens</u>* dans lequel le champ électrique « pointe » au niveau de la surface élémentaire :
- s'il est positif, alors le champ pointe dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$
- s'il est négatif, alors le champ pointe dans le sens opposé à $\overrightarrow{dS}$

La *<u>valeur absolue</u>* du flux est déterminée par la *norme du champ* et par *l'angle entre le champ et le vecteur $\overrightarrow{dS}$*. Pour une norme donnée du champ, la valeur absolue du flux est *maximale* quand le $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires, et *nulle* quand le champ $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont orthogonaux.

3.3. *(Rappel)* Flux du champ à travers une surface finie

Une surface finie peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires.

*Le **flux ϕ** du champ électrique à travers une **surface finie S** est défini comme la somme des flux élémentaires :*

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \delta\phi$$

$$\boldsymbol{\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

*Dans le cas d'une **surface fermée**, la surface est **toujours orientée vers l'extérieur**, et l'expression :*

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

*définit donc le **flux sortant**.*

3.4. Théorème de Gauss

Ce théorème est valable quelle que soit la distribution de charge considérée (volumique, surfacique, linéique ou corpusculaire).

Théorème de Gauss

*Le théorème de Gauss établit une relation entre le **flux du champ électrostatique à travers une surface fermée**, et la **charge électrique totale Q_{int} située à l'intérieur** du volume délimité par cette surface fermée.*

$$\boldsymbol{\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

- Démontrer ce théorème à partir de l'équation de Maxwell associée

4. Exemples de calcul de champ à l'aide du Théorème de Gauss

4.1. Méthodes pour calculer un champ en un point de l'espace

On cherche généralement à déterminer le champ électrique en tout point *M* de l'espace où le champ est défini.

Méthode théorème de Gauss (la seule au programme)

1. Repérer les ***invariances*** de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **dépendance** du champ par rapport aux **coordonnées** du point* M. Il faut définir au préalable un système de coordonnées approprié aux symétries de la distribution de charge.

2. Repérer les ***symétries*** (ou antisymétries) planes de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **direction** du champ électrique au point M*. *Ces plans doivent contenir le point M*.

3. Définir une « ***surface de Gauss*** », *passant par le point M*, et sur laquelle le champ électrique est *uniforme* (si possible), ou *éventuellement tangent sur une partie* de cette surface. Il faut généralement distinguer plusieurs cas, selon la région de l'espace où se situe le point *M* (à l'intérieur / à l'extérieur de la distribution par ex.)

4. Appliquer alors le ***Théorème de Gauss***. Grâce aux étapes précédentes, le calcul du flux (intégrale double) est généralement très simple si la distribution de charge est « hautement symétrique ».

4.2. Champ créé par une charge ponctuelle

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par une charge ponctuelle
- (NB : même si ça n'a pas été nécessaire au calcul, exprimer dS de la surface de Gauss dans le syst de coo)
- Cette formulation vous rappelle-t-elle l'expression d'une autre force fondamentale connue ?
- Trouver deux analogies entre les paramètres de chacune de ces deux forces
- Pour quel signe de la charge le champ est-il divergent ? convergent ? Faire un lien qualitatif avec l'équation de Maxwell-Gauss
- Donner un ordre de grandeur du champ électrique créé par le proton sur l'électron de l'atome d'hydrogène

Le champ électrique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives

4.3. Champ créé par un cylindre uniformément chargé en volume (puis en surface)

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par un cylindre rectiligne infini, de rayon R, chargé uniformément en volume
- (NB : même si ça n'a pas été nécessaire au calcul, exprimer dS de la surface de Gauss dans le syst de coo)
- Faire de même pour un cylindre chargé uniformément en surface. Vérifier la validité des relations de passage

4.4. Sphère uniformément chargée en volume

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume
- Montrer qu'en-dehors de la sphère le champ créé est identique à celui que créerait une charge ponctuelle située en O et égale à la charge totale de la sphère

4.5. Champ à l'intérieur d'une cavité sphérique

Une sphère de centre *O* et de rayon R, chargée uniformément (ρ_0), possède une cavité sphérique vide de charge, de rayon R/4, et de centre *O'* situé à mi-chemin sur un rayon (à R/2 de *O*).

Montrer que le champ est uniforme dans la cavité, on donnera son expression.

4.6. Plan infini uniformément chargé

On modélise une fine couche chargée uniformément par un plan infini uniformément chargé. Cela revient à négliger l'épaisseur de la couche.

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par ce plan, de charge surfacique σ
- (NB : même si ça n'a pas été nécessaire au calcul, exprimer dS de la surface de Gauss dans le syst de coo)
- Vérifier que les relations de passage sont bien vérifiées

4.7. *(Complément)* Fil rectiligne infini uniformément chargé

- Pour tout point M de l'espace, déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un fil rectiligne infiniment long et uniformément chargé.
- Montrer que l'expression du champ est compatible avec l'affirmation : « Un cylindre rectiligne infini (uniformément) chargé en volume donne en tout point qui lui est extérieur un champ similaire à celui d'un fil rectiligne infini ». Donner notamment le lien entre la charge volumique du cylindre, et la charge linéique du fil.

La partie « **Électrostatique** » étudie les lois de l'électrostatique et quelques applications. Les calculs de champs doivent être motivés par l'utilisation de ces champs pour étudier des situations d'intérêt pratique évident. Ces calculs ne s'appuient sur la loi de Coulomb que pour des distributions de charges discrètes. Dans le cas des distributions continues, on se limite aux situations de haute symétrie permettant de calculer le champ par le théorème de Gauss et aux superpositions de champs ainsi obtenus. Cette rubrique permet aussi d'introduire et d'exploiter des analogies avec le champ gravitationnel qui a été étudié en PCSI dans le seul cas d'astres ponctuels.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
5.2. Électrostatique	
5.2.1. Champ électrostatique	
Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.
Propriétés du champ électrostatique Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.