

# Chap.4 – Equations d’onde linéaires ( $\neq$ d’Alembert) Milieux dispersifs – Milieux absorbants

## 1. Exemple de la corde vibrante : prise en compte des frottements fluide

## 2. « Pseudo-OPPH » – Relation de dispersion – Absorption

- 2.1. Une nouvelle famille de solutions : les « pseudo-OPPH »
- 2.2. Interprétations physiques de  $k$
- 2.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase
- 2.4. Indice complexe du milieu : un  $k$  adimensionné

## 3. Paquets d’onde en 1D

- 3.1. Préliminaire : somme discrète de deux OPH de fréquences voisines
- 3.2. Paquet d’onde : une somme continue d’OPH
- 3.3. Propagation dans un milieu faiblement dispersif – Vitesse de groupe

## 4. Propagation d’une OEM dans un plasma peu dense

- 4.1. Ingrédients du modèle
- 4.2. Conductivité complexe du plasma
- 4.3. Relation de dispersion – Filtrage passe-haut – Vitesses de phase et de groupe

## 5. OEM dans les conducteurs ohmiques à BF : effet de peau

- 5.1. Cadre de l’étude : conductivité réelle
- 5.2. Equation d’onde approchée dans le métal : une équation de diffusion
- 5.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase – Vitesse de groupe
- 5.4. Expression de l’onde réelle – Effet de peau
- 5.5. Quelques situations concrètes où l’effet de peau est impliqué
- 5.6. Bilan énergétique : atténuation par l’effet Joule
- 5.7. (*Hors pgm*) Modèle du conducteur parfait

## 6. Un mot sur les OEM dans les conducteurs ohmiques, à plus haute fréquence

- 6.1. Conductivité complexe
- 6.2. Relation de dispersion

**Intro** : Jusqu’à présent, toutes les ondes étudiées vérifiaient l’équation de d’Alembert. Les pulsations temporelle et spatiale d’une OPPH étaient toujours reliées par une relation simple, la vitesse de phase s’identifiant avec la célérité. *Ces deux résultats ne sont pas généraux.*

La prise en compte de phénomènes dissipatifs (frottements mécaniques, résistance électrique) fait apparaître une **atténuation** de l’onde au cours de sa propagation.

Indépendamment des frottements, la dépendance de la vitesse de phase avec la fréquence peut déformer une onde réelle au cours de sa propagation : c’est le phénomène de **dispersion**. Le modèle simplifié du **paquet d’ondes** nous permettra de mathématiser la différence entre **vitesse de phase** et **vitesse de groupe**.

On illustre ces notions sur deux situations particulières : propagation des OEM dans un plasma et dans un conducteur ohmique à basse fréquence.

Les notions générales de ce chapitre restent tout de même **restreintes aux équations d’onde linéaires**.

# 1. Exemple de la corde vibrante : prise en compte des frottements fluide

On considère une corde de masse linéique  $\mu$  et soumise à une tension au repos  $T_0$ .

Un élément de corde est soumis à une force de frottement fluide

$$d\vec{f} = -\mu dx \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y$$

Avec le même raisonnement qu'au chapitre 1, on peut montrer que l'équation d'onde s'écrit (avec  $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ ) :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

*Remarque :*

L'équation d'onde n'est plus celle de d'Alembert, même si elle « la contient ».

On généralise la définition de la **célérité** aux équations non-restreintes à d'Alembert.

A priori, les « ondes progressives sans déformation » ne sont plus une famille de solution satisfaisante.

## 2. « Pseudo-OPPH » – Relation de dispersion – Absorption

### 2.1. Une nouvelle famille de solutions : les « pseudo-OPPH »

L'idée est de rechercher des solutions harmoniques en temps  $\underline{y}(x, t) = \underline{f}(x) e^{j\omega t}$ , avec  $\underline{f}(x) = f(x) e^{j\varphi(x)}$ . Si l'équation d'onde est linéaire,  $\underline{f}(x)$  vérifie une équation différentielle similaire à celle de l'onde, mais complexe.

- ❖ Dans l'exemple précédent, déterminer l'EDiff vérifiée par  $\underline{f}(x)$ .
- ❖ Par analogie avec l'EDiff de l'OHic (mais en complexe), introduire un paramètre complexe  $\underline{k}^2$
- ❖ Donner la forme des solutions de  $\underline{f}(x)$  en fonction de  $\underline{k}$

*Famille de solutions complexes « pseudo-OPPH »*

$$\underline{s}(x, t) = \underline{S}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

$\underline{k}$  (projection du) vecteur d'onde complexe

L'appellation « pseudo-OPPH » n'est pas une convention universelle, on parle parfois « d'OPPH à vecteur d'onde complexe », mais c'est plus long à dire.

### 2.2. Interprétations physiques de $\underline{k}$

Notons respectivement  $k'$  et  $k''$  les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde complexe.

- ❖ Prendre la partie réelle de l'onde complexe  $\underline{s}(x, t)$  pour retrouver l'onde réelle.
- ❖ En déduire la signification physique de  $k'$  et  $k''$ . Discuter la signification physique de leur signe.
- ❖ Quelle est la vitesse de propagation de la phase ?

*Milieu absorbant*

La partie imaginaire de  $\underline{k}$  représente l'atténuation de l'onde avec le temps (en général).

Elle est souvent la conséquence d'effets **dissipatifs** d'un milieu absorbant (frottements, résistance électrique). Elle peut aussi être la conséquence d'effets **géométriques** (extension ou rétrécissement du milieu de propagation)

- ❖ Définir une longueur caractéristique d'atténuation à l'aide de  $k''$

*Remarque 1 :* La partie imaginaire du vecteur d'onde est associée à une atténuation de l'amplitude de l'onde. Cette atténuation n'est pas nécessairement une absorption. L'absorption est définie comme étant une atténuation due à un phénomène dissipatif, *qui se traduit par une diminution du stock d'énergie transportée par l'onde*. Il existe des situations où une onde peut être atténuée pour d'autres raisons (effets géométriques par exemple), i.e. sans perte d'énergie.

*Remarque 2 :* Il existe des situations dans lesquelles l'onde peut être amplifiée, dans un milieu actif par exemple (milieu recevant de l'énergie de la part d'une source extérieure). C'est le cas d'une OEM évoluant dans une cavité laser. Dans le modèle des pseudo-OPPH, cela correspond à une exponentielle croissante au cours de la propagation (avec les notations précédentes, cela correspondrait à  $k' \times k'' > 0$ ).

### 2.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase

#### Relation de dispersion

*La relation entre les pulsations temporelle et spatiale d'une OPPH s'appelle la relation de dispersion :*

$$\underline{k}(\omega) = \dots$$

ou

$$\omega(\underline{k}) = \dots$$

*La relation  $k = \omega/c$  établie pour les ondes vérifiant d'Alembert n'est donc pas générale.*

#### Vitesse de phase d'une OPPH

*Les OPPH se propagent à la vitesse de phase :*

$$v_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{k'}$$

*où  $k' > 0$  est la partie réelle du vecteur d'onde complexe.*

#### Milieu dispersif (rappel)

*Un milieu est dit dispersif si la vitesse de phase dépend de la fréquence de l'OPPH :  $v_\varphi(\omega)$*

*Une onde réaliste ne peut être modélisée que par une somme d'OPPH de fréquences différentes. Dans un milieu dispersif, ces composantes harmoniques ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui provoque donc un étalement temporel et spatial de l'onde totale.*

*On peut dire que les composantes de l'onde totale « se dispersent au cours du temps ».*

Une onde réelle est un « paquet d'onde » composé d'un continuum d'OPPH de fréquences différentes. Les OPPH les plus lentes vont petit à petit prendre du retard, alors que les plus rapides vont prendre de l'avance : cela provoque un étalement du paquet d'onde (il est possible qu'il y ait momentanément une contraction du paquet d'onde, mais celui-ci finit toujours par s'étaler si l'équation d'onde est linéaire).

La dépendance de la vitesse de phase avec la fréquence est à l'origine du phénomène de **dispersion de la lumière blanche par un prisme**. Les lois de Descartes expliquent ce phénomène par la dépendance de l'indice du prisme avec la couleur (la fréquence) de l'onde lumineuse (loi de Cauchy le plus souvent), indice lui-même défini à partir de la vitesse de phase de l'onde dans le prisme.

- ❖ Discuter de la nature de l'onde dans les deux cas particuliers suivants :
  - $k' = 0$
  - $k'' = 0$
- ❖ Revenir au cas de la corde vibrante avec frottements : établir la relation de dispersion
- ❖ La corde est-elle un milieu dispersif ? absorbant ?

## 2.4. Indice complexe du milieu : un $k$ adimensionné

L'équation d'onde n'étant plus l'équation de d'Alembert, on s'attend à ce que la relation de dispersion ne soit plus aussi simple que  $k = \frac{\omega}{c}$ .

### Définition de l'indice complexe : $\underline{n}$

$$\underline{k} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

Sa partie **réelle**  $n'$  s'appelle **l'indice de dispersion** (ou de réfraction).

Sa partie **imaginaire**  $n''$  s'appelle **l'indice d'absorption**.

D'après sa définition, l'indice regroupe toutes les propriétés du milieu qui le font s'écarter d'un comportement type « d'Alembert ». Il n'est donc pas surprenant que l'indice complexe du vide soit égal à 1.

C'est une sorte de  **$k$  adimensionné** : son interprétation physique suit donc celle de  $\underline{k}$ .

- ❖ En exprimant sa partie réelle  $n'$  en fonction de la vitesse de phase  $v_\varphi$ , mettre en évidence la cohérence de cette définition avec celle donnée en optique.
- ❖ Justifier l'appellation 'indice d'absorption' pour sa partie imaginaire.

### Définition d'un milieu transparent

Un milieu est **transparent** lorsque l'indice est réel ( $n'' = 0$ ).

## 3. Paquets d'onde en 1D

### 3.1. Préliminaire : somme discrète de deux OPH de fréquences voisines

On considère un milieu dispersif unidimensionnel, où peuvent se propager des ondes scalaires 1D.

- ⊛ Ecrire la superposition de deux OPH de même amplitude, de fréquences voisines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\Delta\omega \ll \omega_1$  et  $\omega_2$ )
- ⊛ Grâce à une formule de trigo, démontrer que l'onde résultante est le produit entre une OPH de haute fréquence et une enveloppe OPH de basse fréquence
- ⊛ Montrer que l'OPH de haute fréquence et son enveloppe ne se propage pas à la même vitesse

### 3.2. Paquet d'onde : une somme continue d'OPH

#### OPH et pseudo-OPH : des solutions non-physiques

Une OPH est définie en tout point de l'espace et à tout instant. Elle est **illimitée dans l'espace et dans le temps**.  
L'énergie qu'elle transporte est infinie : **ce n'est pas une solution physiquement acceptable**.

On peut montrer que *seule une onde construite grâce à une somme continue d'OPH* est limitée dans l'espace et dans le temps. Lorsque le spectre en fréquence de l'onde est limité à un *petit intervalle*, on appelle cette onde un *paquet d'onde*.

$$\underline{s}(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \underline{A}(\omega) d\omega \times e^{j(\omega t - k(\omega)x)}$$

avec  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Le paquet d'onde réel est donné par la partie réelle de l'expression ci-dessus.

Le paquet d'onde est un **modèle d'onde réaliste**.

Toutes les ondes ne peuvent pas être modélisées par un paquet d'onde (mais par des sommes de paquets, HPgm).

### 3.3. Propagation dans un milieu faiblement dispersif – Vitesse de groupe

On considère la situation suivante :

- propagation d'un paquet d'onde : spectre rectangulaire étroit,  $A(\omega) = A_0$  sur  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , nulle sinon
- milieu non absorbant et peu dispersif :  $k$  réel et faible dépendance de  $k$  avec  $\omega$  (sur largeur  $\Delta\omega$  du paquet)

★ En effectuant un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre de  $k(\omega)$  autour de  $\omega_0$ , montrer que :

$$\underline{s}(x, t) = A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \Delta\omega \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega}{2} \left( t - \frac{x}{v_g} \right) \right]$$

Donner l'expression de  $v_g$ .

- ❖ Interpréter physiquement ce résultat en repérant « une OPH de fréquence moyenne » et « une enveloppe »  
Donner alors l'interprétation physique de  $v_g$ .
- ❖ Montrer que la largeur temporelle de l'enveloppe (odg) est inversement proportionnelle à la largeur en fréquence du spectre du paquet.

#### Vitesse de groupe

Un paquet d'onde est constitué d'une OPH de fréquence moyenne, modulée en amplitude par une enveloppe.  
Le sommet de l'enveloppe se propage à la **vitesse de groupe** :

$$v_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dk}$$

Remarque : On retrouve un résultat analogue au paragraphe précédent (superposition de deux OPH)

Remarque : Il est assez fréquent que la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie. On verra un exemple plus loin. Mais ce n'est pas un résultat général (p.e. faux dans le cas où il y a absorption).

Lorsque le milieu est fortement dispersif, le paquet d'onde se déforme au cours de sa propagation. Il peut momentanément se contracter, mais finit toujours par s'étaler. On trouvera une animation sur le site suivant :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=0WQSoEtknvU>

Remarque : Dans les télécommunications, c'est généralement le sommet de l'enveloppe qui **transmet l'information**. Exemple : bits 0 ou 1 dans une fibre optique. Si le milieu est dispersif, l'étalement des bits peut limiter le débit d'information (car problème si deux bits successifs se chevauchent à l'arrivée).

#### Relation entre largeurs spectrale et temporelle

(Rappel !)

Les largeurs spectrale  $\Delta\omega$  et temporelle  $\Delta t$  d'un paquet d'onde vérifient toujours une relation du type :

$$\Delta\omega \times \Delta t \gtrsim 1$$

Elles varient de manière inversement proportionnelles.

## 4. Propagation d'une OEM dans un plasma peu dense

On a commencé par étudier la propagation des OEM dans le vide. Le plasma peu dense est le milieu chargé qui se rapproche le plus du vide : c'est un gaz dilué ionisé. Voyons ce que la présence de porteurs libres modifie par rapport au vide.

### 4.1. Ingrédients du modèle

Un plasma est un milieu globalement neutre, où les atomes sont partiellement ou totalement ionisés ; les électrons et les ions sont libres de se déplacer. Au repos, les densités volumiques d'électron et d'ion ont la même valeur  $n_0$  : cela signifie que les ions n'ont été ionisés qu'une seule fois, leur charge est  $+e$ .

### Hypothèses :

- le plasma est suffisamment dilué pour négliger les interactions entre les charges
  - les électrons sont non-relativistes : leur vitesse est très faible devant celle de la lumière dans le vide  $v \ll c$
  - on étudie une onde transverse pseudo-OPPH se propageant selon  $+\vec{u}_x$ , polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$  (d'autres types d'onde peuvent exister, on ne les étudiera pas)
- ❖ Ecrire mathématiquement le champ électrique de cette onde, en notation complexe
  - ❖ En déduire l'expression du champ magnétique (pseudo-OPPH aussi)
  - ❖ Donner un argument justifiant que l'on puisse négliger le déplacement des ions devant celui des électrons

#### Plasma : un conducteur non-ohmique

*Le plasma est un conducteur qui ne vérifie pas la loi d'ohm, car les électrons libres n'interagissent pas avec les ions.*

### 4.2. Conductivité complexe du plasma

#### Conductivité complexe pour un milieu qui ne vérifie pas la loi d'ohm

En élec PCSI, lors de l'étude en complexe du régime harmonique forcé, la notion d'impédance a été introduite pour des dipôles qui ne vérifient pas la loi d'ohm réelle.

De la même façon, dans l'étude en complexe de la propagation des OPPH on introduit la notion de conductivité complexe pour des milieux qui ne vérifient pas la loi d'ohm locale réelle.

- ❖ Grâce à MG, montrer que la charge volumique totale est nulle à chaque instant. En déduire que la densité volumique d'électrons est uniforme et constante, égale à  $n_0$  à chaque instant.
- ❖ En notation complexe, appliquer la RFD sur un électron du plasma. On négligera la force magnétique devant la force électrique (sera justifié à la fin).
- ❖ Déterminer la conductivité complexe du milieu. Montrer que  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  sont en quadrature de phase. Que peut-on dire de la puissance volumique moyenne transmise aux électrons par l'onde ? L'onde sera-t-elle atténuée ?

### 4.3. Relation de dispersion – Filtrage passe-haut – Vitesses de phase et de groupe

- ❖ Grâce aux équations de Maxwell écrites en notation complexe, établir la relation de dispersion
- ❖ Montrer que le plasma est un passe-haut pour les OPPH. On introduira une pulsation de coupure : *la pulsation plasma*  $\omega_p$ . Faire l'application numérique dans le cas de l'ionosphère :  $n_0 \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$
- ❖ A basse fréquence, donner l'expression de l'onde réelle. Idem à haute fréquence.
- ❖ A haute fréquence, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Le plasma est-il dispersif ? Tracer les vitesses en fonction de la pulsation.
- ❖ Dans les deux cas, préciser l'expression de l'indice du plasma
- ❖ NB : on peut aussi déterminer la relation de dispersion en passant par l'équation d'onde (en cpx). Le faire.

#### Définition d'une onde évanescente

*A basse fréquence, l'onde est stationnaire et spatialement atténuée : c'est une onde évanescente.*

Une OPPH de pulsation  $\omega < \omega_p$  se propageant dans le vide et incidente sur le plasma sera totalement réfléchi. L'ionosphère est une couche de la haute atmosphère où règne un plasma. Les ondes radio peuvent s'y réfléchir (ainsi qu'au sol) et ainsi voyager d'un bout à l'autre de la Terre.

- ❖ A présent, comparer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique, et justifier l'hypothèse faite.

## 5. OEM dans les conducteurs ohmiques à BF : effet de peau

### 5.1. Cadre de l'étude : conductivité réelle

On étudie la propagation d'onde dans un métal (par ex). On se place à suffisamment basse fréquence pour que la conductivité soit réelle :  $\omega \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{rad.s}^{-1}$ . On avait effectivement montré au chapitre 1 d'électromagnétisme que cette condition permettait d'assurer la validité de la loi d'ohm (à conductivité réelle).

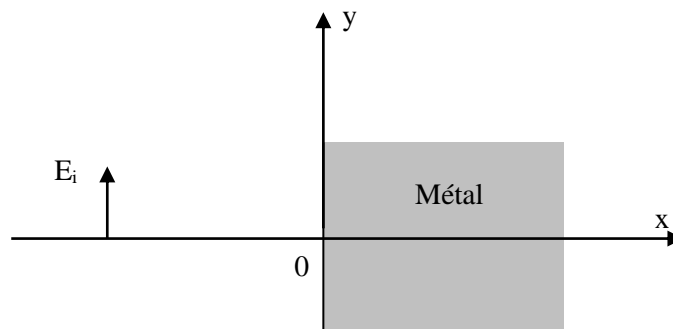
### 5.2. Equation d'onde approchée dans le métal : une équation de diffusion

On cherche l'équation d'onde, on reste donc dans le domaine spatio-temporel : en notation réelle.

Rappel :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$

- ❖ Montrer que la charge volumique du métal est nulle en tout point à tout instant, compte-tenu du cadre d'étude
- ❖ Dans M.A. comparer le terme de courant de déplacement au terme de courant libre. Conclure
- ❖ Etablir l'équation d'onde vérifiée par  $\vec{E}$ . Comment nomme-t-on cette équation ?
- ❖ (Facultatif) Montrer que  $\vec{B}$  vérifie la même équation d'onde

Par la suite, on considère un conducteur emplissant tout le demi-espace  $x > 0$  (cf. schéma ci-dessous). Une OPPH incidente (dans le vide) polarisée rectilignement  $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \vec{u}_y$  atteint le métal et est partiellement transmise. On ne s'intéresse par la suite qu'à la partie de l'onde qui pénètre dans le conducteur. On admet que la condition à la limite en  $x = 0$  assure à l'OPPH transmise dans le métal d'avoir la même pulsation et la même polarisation que l'onde incidente.



### 5.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase – Vitesse de groupe

- ❖ Donner l'écriture de la pseudo-OPPH étudiée (rappel hyp : même pulsation et même polarisation)
- ❖ Etablir la relation de dispersion
- ❖ Déterminer les expressions de la partie réelle de  $\underline{k}$  et de sa partie imaginaire (choix des signes notamment)
- ❖ Introduire dans ces expressions une longueur caractéristique notée  $\delta$
- ❖ En déduire l'expression de l'indice du conducteur
- ❖ Déterminer la vitesse de phase. Le conducteur est-il un milieu dispersif ?
- ❖ En différentiant la partie réelle de la relation de dispersion  $k'(\omega)$ , déterminer la vitesse de groupe
- ❖ Cette dernière semble diverger à haute fréquence. Via une application numérique, et en rappelant que le domaine de validité de l'étude est limité en fréquence, montrer que la vitesse de groupe ne peut pas dépasser  $c$

### 5.4. Expression de l'onde réelle – Effet de peau

- ❖ Ecrire l'onde électrique en complexe. En déduire l'onde magnétique en complexe
- ❖ Ecrire ces deux champs en notation réelle. Quelle est la signification physique de  $\delta$  ?
- ❖ Déterminer sa valeur numérique dans le cuivre à 50 Hz. Que peut-on en tirer pour les applications concrètes ?

## Effet de peau

*Dans un conducteur ohmique, le champ électromagnétique et le courant électrique tendent à se répartir sur les bords du conducteur*

Remarque : On peut reconnaître ici la loi de Lenz de l'induction. Le champ imposé depuis l'extérieur crée des courants induits dans le conducteur. Ces courants tendent à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance, donc à annuler le champ à l'intérieur du conducteur. Si l'on considère un petit volume situé bien au cœur du conducteur, il est bien entouré par des courants induits voisins, et cet effet de modération joue pleinement à son niveau. Mais un volume situé sur les bords est moins entouré par des courants induits, car il est proche de l'extérieur où il ne règne aucun courant : l'effet de modération joue donc moins. Ceci explique qualitativement que le champ électrique y soit plus intense (plus proche de la valeur imposée depuis l'extérieur).

### 5.5. Quelques situations concrètes où l'effet de peau est impliqué

- Le transport du courant dans des fils de Cuivre. Pour limiter la résistance des fils conducteur, on pourrait souhaiter augmenter le diamètre des fils. Mais l'effet de peau limite ce choix, car passé un diamètre de l'ordre de  $\delta$ , l'augmentation du diamètre ne limite plus la résistance puisque seule la partie externe de la section du fil est effectivement traversée par le courant. La solution consiste à utiliser des ensemble de fils en parallèle (torsadés) isolés électriquement les uns des autres : cela a le même effet qu'un seul fil de gros diamètre, mais en s'affranchissant de l'effet de peau
- En TP, dès que la fréquence dépasse 1 kHz, l'effet de peau commence à se faire sentir. Cela se traduit par une dépendance de la résistance interne de la bobine avec la fréquence. L'impédance mesurée d'une bobine de TP n'est donc pas modélisable par  $r + jL\omega$  à toute fréquence. NB : il existe aussi un effet capacitif qui s'exprime à plus haute fréquence, puisque deux fils voisins séparés par le vernis recouvrant les fils constitue un condensateur
- Communication avec un sous-marin par OEM depuis le sol : l'eau de mer étant une solution électrolytique, il faut prendre garde au fait que le signal ne peut pas pénétrer à une profondeur quelconque dans l'eau.
- On a vu en induction que les casseroles à induction sont constituées d'une couche de métal dans laquelle sont générés des courants de Foucault lorsque celle-ci est soumise à un champ magnétique extérieur variable, lui-même créé par une bobine située sous la casserole. Plus l'épaisseur du métal est grande, plus la puissance dissipée par effet Joule est grande. Mais si l'on tient compte de l'effet de peau, et de la fréquence élevée du champ magnétique exciteur ( $qq$  10 kHz), il n'est pas utile de trop augmenter cette épaisseur car le champ exciteur ne peut pas pénétrer aussi profondément que souhaité.
- La pénétration des ondes thermiques dans le sol (sous l'effet des variations de températures quotidiennes, ou saisonnières) est analogue à celle des OEM dans les métaux. C'est l'effet de peau thermique. C'est pourquoi une cave enterrée permet d'assurer une température quasi constante pour la conservation du vin par exemple.

### 5.6. Bilan énergétique : atténuation par l'effet Joule

Généralités préliminaires :

- ❖ Rappeler l'équation locale de conservation de l'énergie EMic en présence de porteurs de charge libres
- ❖ L'écrire sous forme intégrale, en considérant comme système macro un volume de conducteur de section  $S$  (directions  $Oy$  et  $Oz$ ) et s'étendant de  $x = 0$  jusqu'à l'infini... (on suppose que les intégrales convergent)
- ❖ Prendre la valeur moyenne (temporelle) de cette équation intégrale de conservation

On utilise à présent les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  établies précédemment

- ❖ Justifier que la moyenne temporelle du terme de variation d'énergie stockée est nulle
- ❖ En déduire que la puissance électromagnétique entrante est intégralement dissipée par effet Joule
- ⊛ (*facultatif*) Le vérifier avec les expressions des champs établies précédemment (il est alors préférable de revenir au début du 6.4 pour exprimer les ondes en gardant  $\underline{k}$  sous forme  $\text{Re} + j\text{Im}$ )

### Origine physique de l'atténuation de l'OEM dans le conducteur

*Toute la puissance électromagnétique qui pénètre dans le conducteur est dissipée par effet Joule.  
L'atténuation de l'OEM est donc due à un phénomène d'absorption.*



## 5.7. (Hors pgm) Modèle du conducteur parfait

### Définition d'un conducteur parfait

Lorsque  $\delta \ll \lambda_{\text{OEM}} \text{ incidente}$  ou lorsque  $\delta \ll \text{dimensions du conducteur}$ , on peut négliger l'épaisseur de peau, on la considère nulle (admis).

Dans cette modélisation, **tous les champs sont nuls à l'intérieur du conducteur**, et le courant qui existait dans l'épaisseur de peau se retrouve donc à la surface du conducteur.

Dans cette modélisation, **il n'existe plus qu'un courant surfacique  $\vec{j}_S$** .

## 6. Un mot sur les OEM dans les conducteurs ohmiques, à plus haute fréquence

### 6.1. Conductivité complexe

Les ingrédients sont les mêmes que dans le cas du plasma (OPPH transverse polarisée rectilignement notamment), sauf que l'on adopte le modèle de Drude : les porteurs libres interagissent avec le réseau de cations, ce que l'on modélise simplement par une force de frottement fluide :

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

avec  $\tau \sim 10^{-14}$  s pour le cuivre. Ici encore :

- en présence d'onde, le conducteur reste localement neutre, la charge volumique totale reste donc nulle  $\forall(M, t)$ . La densité d'électrons est uniforme et égale à  $n_0$ , qui est aussi la densité de cations fixes
- la force magnétique est négligeable devant la force électrique (vitesse des porteurs très faible devant la vitesse de phase des OPPH dans le conducteur)

- ❖ Déterminer la conductivité complexe du métal
- ❖ Montrer que la conductivité est réelle à basse fréquence (notée  $\gamma_0$ ), son expression étant celle déterminée dans le chapitre traitant de la conduction électrique (chapitre où a été introduite la loi d'ohm locale)
- ❖ En considérant la conductivité comme une fonction de transfert (courant = réponse, champ élec = excitation) :
  - montrer que l'onde provoque un courant dans le métal à basse fréquence, donc y dépose de l'énergie
  - montrer que le métal se comporte comme un plasma à haute fréquence (i.e. la force de Lorentz l'emporte largement sur la force de frottement fluide), donc l'onde n'y dépose pas d'énergie
- ⊛ A haute fréquence, après avoir exprimé la pulsation plasma en fonction de la conductivité réelle  $\gamma_0$ , calculer sa valeur numérique pour le cuivre. (Rappel de la relation de dispersion du plasma :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\omega\gamma$ )
- ⊛ Montrer qu'il existe alors une bande de fréquence intermédiaire, correspondant à la lumière visible, pour laquelle l'onde est évanescence, i.e. l'onde incidente sur un métal est totalement réfléchie

### OEM incidente sur un conducteur ohmique

A basse fréquence, l'onde interagit avec les électrons et se propage dans le conducteur en étant atténuée.

A haute fréquence, l'onde n'interagit plus avec les électrons et se propage sans atténuation.

Il existe une bande de fréquence intermédiaire pour laquelle l'onde est totalement réfléchie.

### 6.2. Relation de dispersion

- ⊛ L'OPPH est polarisée selon  $\vec{u}_y$ , montrer que le champ magnétique est selon  $\vec{u}_z$
- ⊛ Déterminer la relation de dispersion à partir des équations de Maxwell en complexe
- ⊛ En déduire l'indice complexe du métal (ne pas chercher à expliciter les parties réelle et imaginaire)

## Ces ondes qui restent en forme

Comment éviter qu'un train pénétrant à grande vitesse dans un long tunnel engendre une onde de choc aux effets désagréables ? En transformant l'onde sonore initiale en soliton – une onde qui ne se déforme pas.

**E**n entrant dans un tunnel, un train à grande vitesse crée dans l'air une surpression qui, en se propageant, se transforme en une onde de choc (voir la figure 1). Diverses solutions ont été proposées pour éviter aux passagers et aux riverains ses effets gênants telles des secousses ou des déflagrations sonores ; la plus originale consisterait à convertir l'onde de choc en une « onde solitaire » beaucoup moins agressive. Qu'est-ce qu'une telle onde et comment l'obtenir ? La lumière nous viendra de... la lumière ! Nous ferons en effet un détour par les solitons optiques, impulsions lumineuses qui parcourent des centaines de kilomètres de fibre optique sans se déformer.

Tel un piston dans un tube, un train qui pénètre dans un tunnel comprime l'air brutalement, et la surpression créée se propage le long du tunnel. À l'intérieur de cette surpression d'environ 1 000 pascals (un centième d'atmosphère), l'air est d'autant plus chaud qu'il est comprimé, c'est-à-dire que la pression est plus élevée. La vitesse du son augmentant avec la température, les différentes zones de la surpression, qui ne sont pas à la même température, se déplacent à des vitesses distinctes. L'onde de surpression se déforme alors peu à peu : la zone la plus comprimée rattrape le front avant, telle la crête d'une vague qui s'apprête à déferler (voir la figure 2).

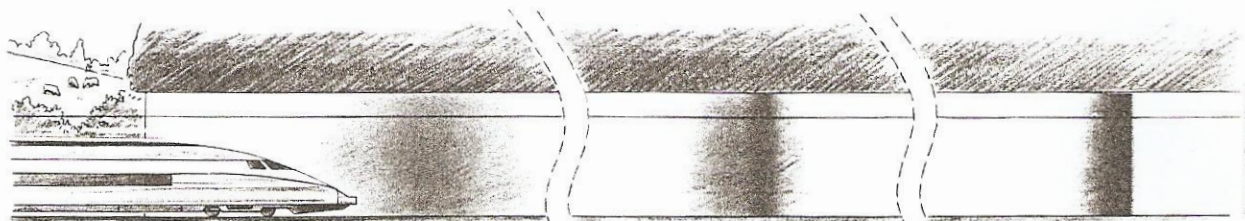
Après plusieurs centaines de mètres, l'onde de surpression s'est raccourcie et son amplitude a presque doublé. Son front est devenu abrupt, elle est devenue une onde de choc. Au bout du tunnel, elle se réfléchit partiellement vers le train et les passagers, qu'elle incommode, tandis qu'à l'extérieur les riverains entendent une sorte de coup de tonnerre.

Pour empêcher l'onde de surpression de se transformer en une onde de choc, il faudrait pouvoir réaliser l'équivalent acoustique du mascaret : une vague qui, lors des grandes marées, remonte les fleuves sans déferler. Ce type d'onde, nommé aujourd'hui soliton, fut observé en 1834 par John Scott Russell, un ingénieur de la marine écossaise. L'arrêt brusque d'un bateau dans un canal étroit avait créé une vague haute d'environ 50 centimètres et longue de 10 mètres qui, à sa grande surprise, ne déferlait pas. Pendant près d'un quart d'heure, Russell suivit à cheval – à la vitesse d'une dizaine de kilomètres par heure – cette onde sans constater de modification de son profil.

### Des mascarets de lumière

Dans un soliton, un second effet, opposé à celui vu avec l'onde de surpression, empêche l'onde de se raidir. Pour le comprendre, examinons les solitons optiques, impulsions lumineuses particulières qui se propagent dans une fibre optique. Comme la surpression dans un tunnel, une impulsion lumineuse se déforme lors de sa progression, car la vitesse de propagation de la lumière dans la matière dépend de l'intensité de l'onde. Aussi la vitesse de la partie centrale de l'impulsion est-elle différente de la vitesse de ses flancs. Même si cet effet, dit de non-linéarité, est très faible pour les intensités lumineuses utilisées pour les télécommunications, il se cumule sur les centaines de kilomètres de fibre et pose problème : l'impulsion déformée risque de chevaucher ses voisines, d'où des erreurs de transmission du signal.

À l'inverse de l'onde de surpression aérienne, la vitesse de propagation de l'onde lumineuse diminue avec l'intensité.



**1. La vitesse du son augmente avec la température.** Or dans la zone centrale de l'onde de surpression (à gauche), la pression est maximale et l'air est plus chaud. Cette partie avance plus vite que le

front avant. Au bout de deux ou trois kilomètres, la zone centrale a rattrapé l'avant de l'onde. L'onde de surpression, raccourcie, est devenue une onde de choc (à droite) où la surpression a presque doublé.

Dessiné de Bruno Vacaro





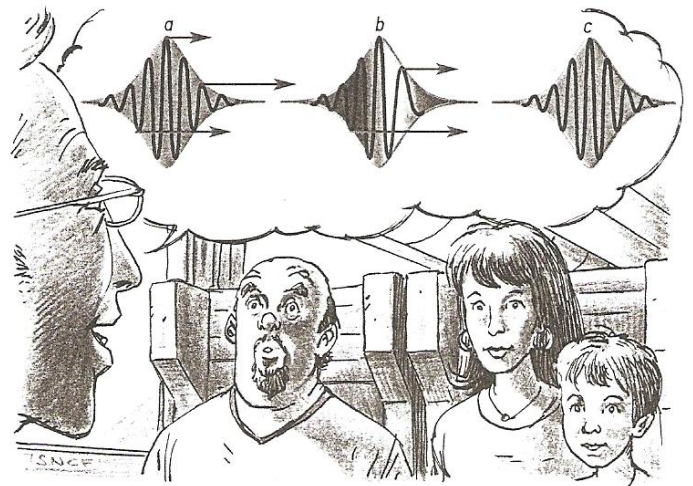
2. Le haut d'une vague parvenue près du rivage avance plus vite que les parties avant et arrière (comme pour l'onde de surpression créée par un train). C'est pourquoi la vague se déforme et finit par déferler. Dans un mascaret – un soliton hydrodynamique –, la dispersion (variation de la vitesse en fonction de la longueur d'onde) compense exactement ce phénomène.

L'intensité étant maximale vers le milieu de l'impulsion lumineuse, cette zone avance moins vite que le front avant ou arrière de l'onde. Il s'ensuit que les oscillations formant l'onde initiale se resserrent à l'arrière et se desserrent à l'avant : les longueurs d'onde diminuent à l'arrière et augmentent à l'avant (voir la figure 3).

Le second effet antagoniste, dit de dispersion, entre alors en jeu : dans la matière, la vitesse de la lumière dépend de la longueur d'onde. Au sein d'une fibre optique, la vitesse de propagation diminue quand la longueur d'onde augmente. L'avant de l'impulsion se propage donc moins vite que l'arrière. Peu à peu, les composantes de courtes longueurs d'onde rattrapent, puis dépassent les composantes de grandes longueurs d'onde, à l'inverse de l'effet précédent. Pour une intensité lumineuse bien choisie, les deux effets se compensent exactement et créent un soliton optique : une impulsion lumineuse qui se propage en conservant sa forme.

Un tel soliton est une entité robuste. Si l'intensité initiale est trop élevée, l'impulsion lumineuse commence par se déformer et par perdre une partie de son énergie, pour finalement former un soliton qui se propage sur des milliers de kilomètres. De plus, on peut injecter dans une fibre optique des solitons de longueurs d'onde différentes. Ceux-ci se propagent à des vitesses différentes et peuvent donc entrer en collision. Toutefois, de façon surprenante, chaque soliton reprend après la collision sa forme et sa course solitaire, comme si chaque soliton avait une vie propre et indépendante.

Longtemps considérée comme une utopie, la télécommunication optique par solitons est maintenant une réalité. Ainsi, une partie des communications entre la Corse et le continent s'effectue depuis 2002 par solitons circulant dans 350 kilomètres de fibre optique, sans aucun relais sous la mer, avec un débit maximal de 800 gigabits par seconde et par fibre.



3. Dans une fibre optique, la partie intense d'une impulsion lumineuse avance moins vite (a), ce qui dilate les ondulations à l'avant et, inversement, les resserre à l'arrière (b). Par ailleurs, les courtes longueurs d'onde se propagent plus vite que les grandes (b). Quand ces deux effets se compensent, on a un soliton optique, impulsion qui garde sa forme (a et c).

Qu'en est-il du mascaret ? Il se décompose lui aussi en vagues de longueurs d'onde différentes, qui se propagent à des vitesses distinctes. Comme pour le soliton optique, deux effets – la non-linéarité liée à l'amplitude et la dispersion des longueurs d'onde – se compensent et assurent sa stabilité.

## Un soliton sonore au Soleil levant

Et pour les ondes de surpression dans l'air ? La vitesse du son étant la même pour toutes les longueurs d'onde, il n'y a pas d'effet de dispersion. C'est pourquoi il n'existe pas de soliton naturel en acoustique. Comment éviter alors que l'onde de surpression créée par un train ne se déforme en une onde de choc ?

Pour former un soliton acoustique, Nobumasa Sugimoto, de l'Université d'Osaka, a trouvé le moyen d'introduire de la dispersion : brancher à intervalles réguliers sur les côtés du tuyau des résonateurs acoustiques (de simples cavités) de taille adaptée. Pour les longueurs d'onde proches de la valeur correspondant à une résonance des cavités, la propagation est ralentie. En choisissant bien la taille des résonateurs, on obtient l'effet de dispersion recherché. Les expériences se sont limitées jusqu'à présent à des tubes de dix mètres de longueur, mais N. Sugimoto est persuadé que de tels branchements aideront à mettre au point des machines moins bruyantes – des compresseurs par exemple – et permettront un jour de transporter chaleur ou autres formes d'énergie par voie acoustique !

N. SUGIMOTO et al., *Verification of acoustic solitary waves*, in *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 504, pp. 271-299, 2004.

M. REMOISENET, *Waves called solitons* (3<sup>e</sup> éd. corrigée), Springer, 2003.

La partie « **Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels** » est consacrée aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude s'appuie sur des exemples variés empruntés aux domaines de la mécanique ou de l'électromagnétisme. Elle est menée sur des ondes harmoniques planes en représentation complexe puis sur des paquets d'ondes harmoniques planes. S'agissant des paquets d'ondes, on se limite au cas où l'étalement est négligeable.

L'étude de la propagation des ondes dans un plasma dilué est exclusivement limitée aux ondes transverses électriques ; le professeur est invité à signaler, sans soucis d'exhaustivité, quelques limites du modèle.

Notions et contenus	Capacités exigibles
<b>6.2. Phénomènes de propagation linéaires unidimensionnels</b>	
<b>6.2.1. Dispersion et absorption</b>	
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion caractéristique d'un phénomène de propagation en utilisant des ondes de la forme $\exp\pm j(\underline{k}x - \omega t)$ . Distinguer différents types de comportements selon la valeur de la pulsation.
Dispersion, absorption.	Associer les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}$ aux phénomènes de dispersion et d'absorption.
Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu non absorbant et faiblement dispersif : vitesse de phase et vitesse de groupe.	Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre. Déterminer la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.  <b>Étudier la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial.</b>  <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
<b>6.2.2. Ondes électromagnétiques dans les milieux matériels</b>	
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique unidirectionnelle dans un conducteur ohmique de conductivité réelle. Effet de peau dans un conducteur ohmique.	Identifier une analogie avec un phénomène de diffusion. Établir la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique à basses fréquences. Associer l'atténuation de l'onde dans le milieu conducteur à une dissipation d'énergie.



	Estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à différentes fréquences.
Propagation d'une onde électromagnétique plane harmonique transverse et unidirectionnelle dans un plasma dilué. Conductivité électrique complexe.	Justifier la neutralité électrique locale du plasma en présence d'une onde transverse. Établir l'expression de la conductivité électrique complexe du plasma. Interpréter énergétiquement le caractère imaginaire pur de la conductivité électrique complexe du plasma.
Relation de dispersion. Pulsation plasma. Domaine de transparence. Domaine réactif, onde évanescente.	Établir la relation de dispersion des ondes planes progressives harmoniques transverses. Exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes dans le domaine de transparence du plasma. Interpréter la pulsation plasma comme une pulsation de coupure. Citer les caractéristiques d'une onde stationnaire évanescente. Justifier que, dans le domaine réactif, une onde électromagnétique harmonique ne transporte aucune puissance en moyenne.