

Chap.2 – Doc principal

Ondes sonores dans les fluides

1. Ondes sonores dans les fluides dans l'Approximation acoustique

- 1.1. Description qualitative des ondes sonores
- 1.2. Ingrédients du modèle – Approximation acoustique
- 1.3. Linéarisation des 3 équations des ondes sonores
- 1.4. Etablissement de l'équation de d'Alembert
- 1.5. Célérité des ondes sonores dans les gaz et les liquides

2. Structure des OPPH

- 2.1. (Culturel) Ondes Planes Progressives (OPP) comme famille de solutions en 3D
- 2.2. OPPH et notation complexe
- 2.3. Structure des OPPH sonores
- 2.4. Couplage entre v_1 et p_1 – Impédance acoustique
- 2.5. (Culturel) Intérêt du modèle d'OPPH

3. Aspects énergétiques des ondes sonores

- 3.1. Energies associées aux ondes sonores – Equation de conservation
- 3.2. Application aux OPPH
- 3.3. Intensité sonore en décibels

4. Ondes sonores sphériques

- 4.1. Expression mathématique
- 4.2. Interprétation énergétique du facteur $1/r$

5. (Compléments) Ondes stationnaires dans les tuyaux sonores

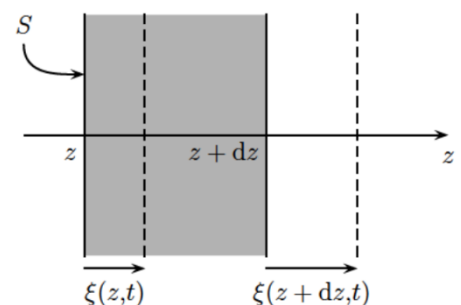
- 5.1. Les différentes conditions aux limites possibles
- 5.2. Modes propres des tuyaux
- 5.3. Aspects énergétiques

Intro : Autre type d'ondes mécaniques : les ondes sonores dans les fluides. C'est l'occasion d'étudier des ondes se propageant dans un milieu 3D, avec une nouvelle famille de solution : les OPPH (généralisation 3D des OPH, précédemment vues en 1D), et les ondes sphériques.

1. Ondes sonores dans les fluides dans l'Approximation acoustique

1.1. Description qualitative des ondes sonores

Une onde sonore dans un fluide est une onde de compression. L'onde naît des oscillations locales du champ de vitesse et du champ de pression. Pour s'imaginer simplement le processus de propagation, considérons une tranche mésoscopique de fluide (particule de fluide) en contact sur sa gauche avec la membrane d'un haut-parleur. Lorsque la membrane du haut-parleur pousse l'extrémité gauche de la tranche de fluide, sa partie droite reste dans un premier temps immobile, et la tranche est comprimée. Du fait de son « élasticité » (liée à la compressibilité du fluide), la tranche tend à retrouver sa forme de départ, et son extrémité droite pousse donc sur la tranche de fluide suivante, etc.



Caractère longitudinale des ondes sonores dans un fluide

La direction des vibrations du milieu de propagation se font le long de la direction de propagation : l'onde est dite **longitudinale**.

NB : La propagation d'onde transverse dans un fluide est aussi possible si le fluide est visqueux. Nous n'étudierons pas ce type d'onde dans ce chapitre.

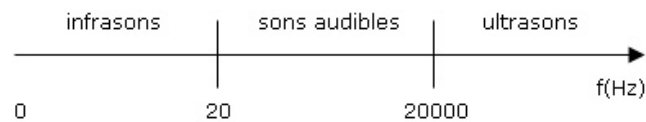
Rôle de la compressibilité du fluide

Pour expliquer la propagation des ondes sonores longitudinales, il est indispensable de tenir compte de la **compressibilité** du fluide, même si celle-ci est usuellement considérée faible (ex : liquides)

Ordres de grandeur des champs acoustiques :

- variation du champ de pression due à la présence de l'onde : $10^{-2} Pa$
- déplacement des particules de fluide : $qq\ nm$
- champ de vitesse : $qq\ \mu m.s^{-1} \leftrightarrow$ **Ne pas confondre avec la vitesse de propagation de l'onde**

On remarque qu'une onde sonore ne modifie que très faiblement les champs de pression et de vitesse du fluide.



1.2. Ingrédients du modèle – Approximation acoustique

Description du fluide :

- on doit nécessairement tenir compte de la **compressibilité** du fluide (même pour un liquide)
- le fluide est **parfait**, on néglige tout phénomène diffusif (pas de viscosité, ni de diffusion thermique)
- l'évolution d'une particule de fluide est donc **adiabatique réversible** (donc **isentropique**)
- on **néglige le poids** devant les forces de pression
- en l'absence d'onde (EQ), P et μ sont **uniformes** et stationnaires et le champ des vitesses est **nul**

Approximation acoustique

L'onde sonore est considérée comme une **petite perturbation** par rapport à l'équilibre.

$$P = P_0 + p_1$$

$$\mu = \mu_0 + \mu_1$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1$$

Les champs $p_1, \mu_1, \vec{v}_1$ associés à l'onde sont **des infiniment petits** d'ordre 1 : $p_1 \ll P_0$; $\mu_1 \ll \mu_0$; $v_1 \ll c$
 p_1 est nommé **surpression** (ou pression acoustique).

ATTENTION à ne pas **CONFONDRE** le champ des vitesses (**vibration**) et la vitesse de l'onde (**propagation**)

Dans les calculs qui suivent, on ne conserve que les termes du 1^{er} ordre en pression, masse volumique et vitesse :

- un produit de deux quantités d'ordre 1 est un terme d'ordre 2
- une dérivée d'un terme d'ordre 1 est un terme d'ordre 1 (cf. raisonnement par odg / analyse dim)

1.3. Linéarisation des 3 équations des ondes sonores

Trois équations sont nécessaires pour établir l'équation d'onde, puisque 3 champs interviennent dans les équations régissant le comportement du fluide où se propage l'onde.

➤ **Activité 1 : Les 3 équations des ondes sonores – Linéarisation** ⚡

1.4. Etablissement de l'équation de d'Alembert

Pour simplifier les calculs dans un premier temps, on modélise la situation comme étant unidimensionnelle (ce qui implique unidirectionnelle, via l'équation d'Euler) : $p_1(x, t)$; $v_1(x, t)$ et $\mu_1(x, t)$.

➤ **Activité 2 : Etablir l'équation de d'Alembert** ⚡

Equation de d'Alembert pour un champ scalaire en 3D

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta p_1$$

1.5. Célérité des ondes sonores dans les gaz et les liquides

➤ **Activité 3 : Célérité des ondes dans l'air considéré comme un gaz parfait** ⚡

Comme dans toute étude d'ondes mécaniques, il est essentiel de **ne pas confondre la vitesse de vibrations des éléments du milieu (particule de fluide, brin de corde) avec la vitesse de propagation de l'onde.**

$$c_{\text{air}} \sim 340 \text{ m.s}^{-1}$$
$$c_{\text{eau}} \sim 1500 \text{ m.s}^{-1}$$

➤ **Activité 4 : Validation de l'hypothèse isentropique**

2. Structure des OPPH

2.1. (Culturel) Ondes Planes Progressives (OPP) comme famille de solutions en 3D

En 3D, les OP $f(\mathbf{x} - \mathbf{ct})$ deviennent des OPP : Ondes Planes Progressives. Pourquoi « planes » ?

Définition d'une surface d'onde

Définie à un instant donné, une surface d'onde est le lieu des points équi-phases : ensemble des points $\mathbf{M}(\vec{r})$ tels que $\phi(\vec{r}) = C^{te}$

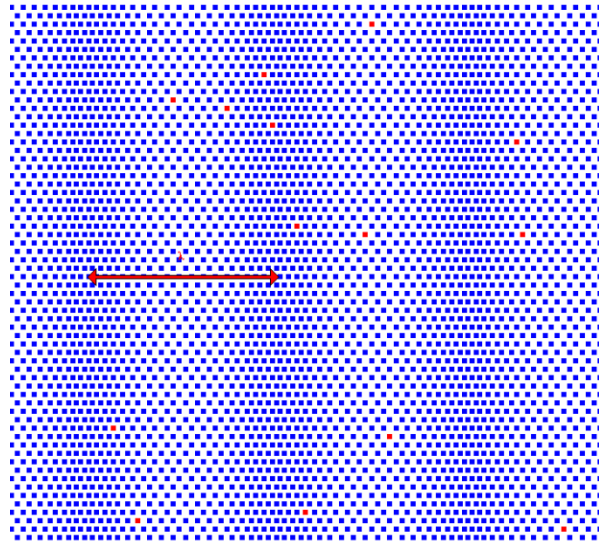
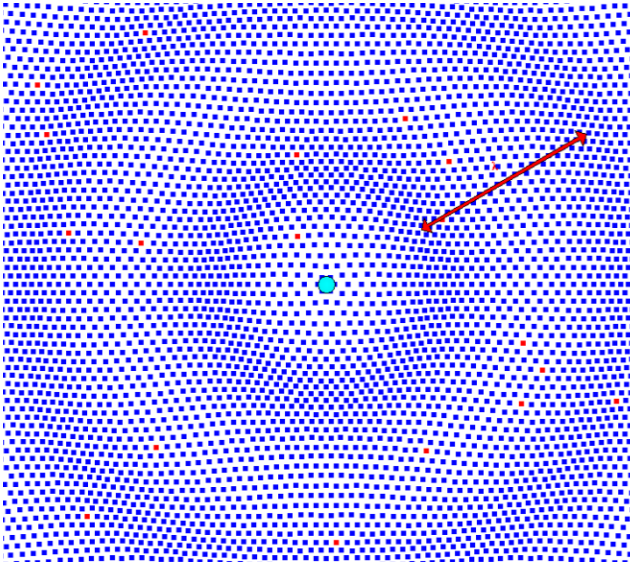
Remarque : dans le cas des ondes unidimensionnelles (corde par exemple), une valeur de la phase correspond à un seul point. Il n'est donc pas intéressant de définir le lieu des points équi-phases.

Définition d'une onde plane

Si les **surfaces d'onde** sont des **plans** ET que l'**amplitude de l'onde y est uniforme**, l'onde est dite « plane ».
Si l'on oriente bien le repère, alors l'onde ne dépend que d'une seule variable d'espace.

- (facultatif) Vérifier qu'une onde du type $f(x - ct)$ peut bien être qualifiée de plane

On peut voir des surfaces d'onde planes (ou sphériques) sur les animations du site suivant :
<http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/ondes/longitudinales/son.htm>



Une onde plane progressive $s(\vec{r}, t)$ se propageant dans la direction $\vec{u}$ s'écrit donc :

$$s(\vec{r}, t) = f(\phi)$$

$$\phi(\vec{r}, t) = t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}$$

- (facultatif) Vérifier sur un schéma que la phase est bien fixée par le terme $\vec{u} \cdot \vec{r}$

2.2. OPPH et notation complexe

Onde plane progressive harmonique OPPH

$$s(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

avec la définition du **vecteur d'onde** $\vec{k} \stackrel{\text{def}}{=} k \vec{u}$

- (facultatif) A partir de l'expression d'une OPP se propageant selon $\vec{u}$, démontrer cette expression (en vérifiant notamment que la définition du vecteur d'onde est valide).
- ❖ Quelle est l'interprétation physique du vecteur d'onde ?
- ❖ En réinjectant l'OPPH dans l'équation de d'Alembert 3D, vérifier que la relation entre les pulsations spatiale et temporelle est la même qu'en 1D
- ❖ Donner l'expression de l'OPPH complexe $\underline{s}(\vec{r}, t)$. Quelle autre convention peut-on utiliser ?
- ❖ Définir l'amplitude complexe de l'onde, regroupant l'info sur l'amplitude réelle et la phase à l'origine

Correspondance entre opérateurs différentiels / complexes

$$\frac{\partial}{\partial t} s \leftrightarrow (j\omega) \times \underline{s}$$

$$\vec{\nabla} s \leftrightarrow (-j\vec{k}) \times \underline{s}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \leftrightarrow (-j\vec{k}) \cdot \underline{\vec{v}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \leftrightarrow (-j\vec{k}) \wedge \underline{\vec{v}}$$

2.3. Structure des OPPH sonores

➤ **Activité 5 : Ondes longitudinales – Relation de dispersion de l'hypothèse isentropique** ⚡

2.4. Couplage entre v_1 et p_1 – Impédance acoustique

Equations de couplage en physique des ondes

*La plupart des phénomènes ondulatoires naissent du couplage entre (au moins ?) deux grandeurs physiques.
La dérivée temporelle de l'une est égale à la dérivée spatiale de l'autre, et inversement.*

Définition de l'impédance acoustique **(OPPH uniquement, OPP aussi en fait)**

Dans le cas des OPPH, l'impédance du milieu permet de relier les grandeurs couplées.

$$\underline{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1}}$$

ou

$$\underline{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{p_1}}{\underline{v_1 S}}$$

avec $v_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}$ la projection du vecteur selon la direction de vibration du fluide.

Remarque : Dans les cas que nous traiterons, l'impédance ne dépend que des propriétés du milieu de propagation, et éventuellement de la fréquence (si OPPH) : on parle donc « d'impédance du milieu de propagation ». Comme en élec, une fois connue l'impédance du milieu, connaître l'onde en pression suffit pour connaître celle en vitesse. Dans certaines circonstances, il peut être plus pratique de définir l'impédance acoustique comme le rapport de la surpression sur le débit volumique. Sans précision, c'est la première définition que nous utiliserons.

Impédance caractéristique du milieu de propagation

*Un phénomène ondulatoire résulte de la **propagation couplée de deux grandeurs physiques**.
Dans le cas d'OP ou d'OPH, les deux grandeurs sont reliées par l'impédance du milieu.*

L'impédance change de signe selon que l'OP progresse vers la droite ou vers la gauche.

ATTENTION : si l'onde n'est pas une OP, alors la notion d'impédance ne peut pas être utilisée.

➤ **Activité 6 : Etablir l'expression de l'impédance acoustique** ⚡

NB : L'impédance étant indépendante de la fréquence de l'OPPH, elle peut également être utilisée pour une OPP.

Expression de l'impédance acoustique

(OPPH uniquement, OPP aussi en fait)

$$Z = \pm \mu_0 c$$

2.5. (Culturel) Intérêt du modèle d'OPPH

Tout d'abord, commençons par l'intérêt de l'aspect Harmonique. D'après l'analyse de Fourier, les OPPH permettent d'engendrer toute OPP par sommation (discrète ou continue). Il faut sommer triplement sur les composantes du vecteur d'onde (i.e. sur les trois directions de propagation possibles $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) pour engendrer n'importe quelle onde. La sommation sur la pulsation ω est « incluse » dans cette triple intégration (cf. relation entre ω et k).

Mais... quel est l'intérêt des OPP pour l'étude des ondes ?

La définition mathématique d'une OPP – par exemple $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ pour la surpression – montre que c'est une onde illimitée selon les axes $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ du repère. Intuitivement, cette extension spatiale infinie de l'onde implique qu'elle transporte avec elle une quantité d'énergie infinie.

Les OPP ne sont pas physiquement acceptables

*Le modèle d'OPP ne correspond pas à une réalité physique :
c'est une base de décomposition des ondes réelles, solutions de l'équation de d'Alembert*

Dans certaines circonstances pourtant, le modèle d'OPP peut décrire une onde réelle avec une bonne approximation. Toute onde réelle est limitée transversalement à sa direction de propagation. Considérons par exemple une onde ayant la forme d'un faisceau cylindrique de diamètre D (analogie avec un faisceau lumineux). Ce faisceau cylindrique a pu être façonné en faisant passer l'onde à travers un trou de diamètre D .

- (facultatif) En rappel du cours sur la diffraction, expliquer pourquoi le faisceau n'est pas vraiment cylindrique à la sortie du trou. Donner mathématiquement l'écart à cette forme cylindrique.

Une onde plane limitée transversalement ne peut donc rigoureusement pas exister, à cause du phénomène de diffraction. Mais on pourra assimiler un faisceau limité transversalement à une OPP tant que la divergence du faisceau est faible, i.e. tant que $\lambda \ll D$.

Les OPP comme modèle approximatif des larges faisceaux

Un faisceau dont la dimension transversale D est très grande devant les longueurs d'onde λ présentes dans le spectre du faisceau peut être assimilé à une OPP.

3. Aspects énergétiques des ondes sonores

3.1. Energies associées aux ondes sonores – Equation de conservation

- (Facultatif : cf. corrigé manuscrit) Soit une particule de fluide, de section S , de masse m et de longueur à l'équilibre L_0 (dimension prise longitudinalement à la propagation). On l'assimile à un ressort, et les forces de pression s'appliquent sur les sections gauche et droite de la particule. Montrer que :
 - la compression $(L_0 - L)$ de la particule due à la surpression s'écrit $\mu m / (\mu_0^2 S)$
 - d'après la relation force/compression du ressort, sa raideur s'écrit $k = \mu_0 S^2 / (m \chi_s)$
 - l'énergie potentielle d'un ressort peut s'écrire $E_p = \frac{1}{2} F^2 / k$

En déduire l'expression de l'énergie potentielle volumique élastique associée à l'onde acoustique

Equation locale de conservation de l'énergie acoustique (admise)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) = 0$$

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_{s0} p_1^2$$

$$\vec{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} p_1 \vec{v}_1$$

Le terme d'énergie volumique stockée est la somme de l'énergie cinétique volumique associée à l'onde, et de l'énergie potentielle élastique volumique associée à la compression élastique des particules de fluide.

- ❖ Interpréter physiquement chacun des termes de l'équation de conservation. Donner les unités
- ❖ Exprimer la puissance acoustique « rayonnée à travers une surface » (i.e. qui traverse une surface) en fonction d'un des champs ci-dessus.

3.2. Application aux OPPH

➤ **Activité 7 : Etude énergétique des OPPH** ⚡

3.3. Intensité sonore en décibels

Définition intensité sonore en dB
une puissance surfacique moyenne en log

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{n} \rangle$$

$I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est le seuil d'audibilité,

et $\vec{n}$ la direction selon laquelle le transfert de puissance est étudié (la normale au capteur en général)

NB : Si $\vec{n}$ et $\vec{\Pi}$ sont de même direction et de même sens, alors $\vec{\Pi} \cdot \vec{n} = \|\vec{\Pi}\|$

Odg : pièce silencieuse 30 dB, bébé pleure 80 dB (1000 dB ressentis), marteau piqueur 130 dB

- ❖ Dans le cas d'une OPPH, exprimer l'intensité acoustique en fonction de l'amplitude (de p_1 ou de v_1)
- ❖ Faire le lien entre la définition de l'intensité sonore I et la définition de l'éclairement en optique

4. Ondes sonores sphériques

4.1. Expression mathématique

On considère une situation à symétrie sphérique, i.e. invariante par rotation d'angles θ et φ en coordonnées sphériques. On peut imaginer comme situation concrète un son émis par une source quasi-ponctuelle.

L'expression du laplacien en coordonnées sphériques permet alors d'écrire l'équation de d'Alembert vérifiée par la surpression $p(r, t)$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2(r \times p)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2(r \times p)}{\partial r^2}$$

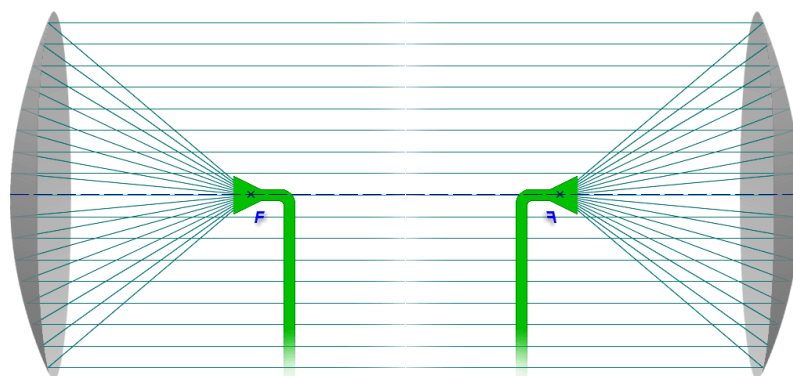
La solution générale est donc :

$$p(r, t) = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}$$

Les surfaces d'onde sont définies à $\Phi(r, t) = C^{te}$, et l'on remarque donc que ces surfaces sont des sphères. Le premier terme s'interprète comme une onde sphérique divergente à partir de l'origine du repère. Le second comme une onde sphérique convergente vers l'origine du repère.

Exemple d'une portion d'onde sphérique divergente, puis convergente : « paraboles des sons », Cité des sciences

<https://www.youtube.com/watch?v=mK6D5oXDsls>



- ❖ Donner l'expression mathématique d'une onde sphérique divergente et harmonique
- ❖ Déterminer la relation de dispersion (efficacement, sans faire tous les calculs)

On note qu'une telle onde est très similaire à une OPPH, seul le terme $1/r$ les différencie. On explique au paragraphe suivant l'origine physique de ce terme, mais notons déjà que cette baisse d'amplitude au cours de la propagation n'est pas due à un phénomène dissipatif, puisque l'équation de d'Alembert n'incorpore pas ce type « d'ingrédient ».

Pour finir, en remarquant qu'une onde sphérique peut être localement assimilée à son plan tangent, une onde sphérique est donc localement assimilable à une onde plane. Concrètement, cette approximation peut être faite lorsque l'on étudie une onde sphérique suffisamment loin de la source qui l'a émise.

4.2. Interprétation énergétique du facteur $1/r$

➤ **Activité 8 : Interprétation énergétique du $1/r$ des ondes sphériques** ⚡

L'origine du facteur $1/r$ des ondes sphériques en pression et en vitesse s'explique par la décroissance en $1/r^2$ de la puissance surfacique, rendue nécessaire par la loi de conservation de l'énergie.

5. (Compléments) Ondes stationnaires dans les tuyaux sonores

On considère des ondes sonores évoluant dans un tuyau rectiligne de section constante. On se place donc ici dans le cas unidimensionnel (1D). On recherche les modes propres de cette cavité.

5.1. Les différentes conditions aux limites possibles

- ❖ Donner la forme mathématique d'une OSH en surpression.
- ❖ En déduire la forme mathématique d'une OSH en vitesse à partir de la RFD linéarisée. Pourquoi ne peut-on pas utiliser l'impédance ?
- ❖ Pourquoi peut-on dire que les OSH en vitesse et en surpression sont « en quadrature spatiale et temporelle » ?

On considère les deux conditions aux limites extrêmes au bout d'un tuyau :

- fermé par une membrane rigide
- ou ouvert à l'air libre.
- ❖ Exprimer mathématiquement ces conditions aux limites.
- ❖ Faire l'analogie avec la corde vibrante. Puis avec le câble coaxial.

5.2. Modes propres des tuyaux

- ❖ Si le tuyau est fermé aux deux extrémités, montrer graphiquement que seules certaines OS (en vitesse) peuvent exister
- ❖ Comment appelle-t-on ces OS ?
- ❖ En raisonnant graphiquement, dessiner les OS (en vitesse) possibles lorsque les deux extrémités du tuyau sont ouvertes.
- ❖ En raisonnant graphiquement, dessiner les OS possibles lorsque l'une est fermée et l'autre ouverte. Toutes les harmoniques sont-elles présentes dans ce cas ?

Les instruments à vent peuvent être classés en deux catégories : les flûtes et les instruments à anche (clarinette). Lorsque l'on souffle dans l'instrument, on excite certains modes propres de la cavité. Flûte : tuyau ouvert aux deux bouts. Clarinette : fermée du côté de l'anche.

5.3. Aspects énergétiques

On considère une OS quelconque de la cavité.

- ❖ Montrer que le vecteur puissance surfacique est nul en moyenne. Interpréter physiquement.
- ❖ Etablir les expressions des énergies volumiques moyennes. En déduire que l'énergie volumique totale est uniformément répartie dans le tuyau.

6.1.2. Ondes acoustiques dans les fluides	
Approximation acoustique. Équation de d'Alembert pour la surpression acoustique.	Classer les ondes acoustiques par domaines fréquentiels. Valider l'approximation acoustique. Établir, par une approche eulérienne, l'équation de propagation de la surpression acoustique dans une situation unidimensionnelle en coordonnées cartésiennes. Utiliser l'opérateur laplacien pour généraliser l'équation d'onde.
Célérité des ondes acoustiques.	Exprimer la célérité des ondes acoustiques en fonction de la température pour un gaz parfait.
Ondes planes progressives harmoniques : caractère longitudinal, impédance acoustique.	Exploiter la notion d'impédance acoustique pour faire le lien entre les champs de surpression et de vitesse d'une onde plane progressive harmonique. Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
Densité volumique d'énergie acoustique, vecteur densité de courant énergétique. Intensité sonore. Niveau d'intensité sonore.	Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde. Citer quelques ordres de grandeur de niveaux d'intensité sonore.
Ondes acoustiques sphériques harmoniques.	Utiliser une expression fournie de la surpression pour interpréter par un argument énergétique la décroissance en $1/r$ de l'amplitude.