

Chap.1 – Cinématique du point matériel

1. Point matériel et relativité du mouvement

- 1.1. Notion de point matériel
- 1.2. Relativité du mouvement - Notion de référentiel
- 1.3. Trajectoire dans un référentiel

2. Repérage d'un point - Bases de projection

- 2.1. Comment repérer la position d'un point dans l'espace
- 2.2. Produit scalaire, BOND et projection d'un vecteur selon un axe unitaire
- 2.3. Base de projection **fixe** dans R : système de coordonnées cartésiennes
- 2.4. Base de projection **mobile** : système de coordonnées cylindriques
- 2.5. Dessiner un repère et le point dont on étudie le mouvement : méthode
- 2.6. Dérivée temporelle d'un vecteur dans un référentiel donné

3. Vitesse d'un point dans un référentiel

- 3.1. Définition
- 3.2. Composantes et norme du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes
- 3.3. Composantes et norme du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

4. Accélération d'un point dans un référentiel

- 4.1. Définition
- 4.2. Composantes et norme du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes
- 4.3. Composantes et norme du vecteur accélération en coordonnées cylindriques

5. Exemples de mouvements usuels

- 5.1. Mouvement rectiligne uniforme
- 5.2. Mouvement uniformément accéléré
- 5.3. Mouvement circulaire
- 5.4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

6. Retour sur la notion de référentiel

Intro :

La mécanique est la branche de la physique qui étudie le mouvement des corps, c'est-à-dire leur évolution dans l'espace et dans le temps. Avec cette définition, on comprend que le champ d'application de la mécanique est très large. Les concepts que l'on va étudier cette année sont ceux de la *mécanique classique*, dont les fondements théoriques ont été formulés par Newton au XVII^e siècle. On parle aussi de *mécanique newtonienne*.

La mécanique classique constitue une bonne approximation des théories plus modernes que sont la mécanique relativiste (restreinte et générale) et la mécanique quantique. Son champ d'application n'est donc pas illimité, mais elle reste largement vérifiée – donc utilisée – dans les applications courantes.

En première année, on se restreint à la *mécanique du point matériel*. En deuxième année, l'étude est élargie aux systèmes de points matériels, et permet de traiter le mouvement des fluides et des solides à partir des concepts abordés en première année.

On peut distinguer deux types d'étude en mécanique : la *cinématique* et la *dynamique*. La première est une étude descriptive du mouvement, indépendamment des causes qui lui ont donné naissance. La seconde consiste à expliquer, prédire et interpréter le mouvement des corps, en considérant les forces qui leur sont appliquées.

Dans ce chapitre, on s'attache uniquement à *décrire le mouvement* d'un point. On introduit les concepts physiques et les outils mathématiques de ce qu'on appelle la *cinématique du point*.

1. Point matériel et relativité du mouvement

1.1. Notion de point matériel

Un point matériel est un système mécanique :

- dont l'extension spatiale est nulle ; il est géométriquement assimilé à un point mathématique
- doté d'une grandeur physique intrinsèque : la masse

Un point matériel ne peut donc pas tourner sur lui-même. Le mouvement d'un point matériel est nécessairement un mouvement de translation.

NB : ne pas confondre rotation d'un corps sur lui-même et mouvement de translation circulaire autour d'un point

Ce concept peut sembler trop restrictif, mais il est utile pour plusieurs raisons :

- il modélise fidèlement les particules élémentaires (électrons par ex)
- il modélise de manière approximative les systèmes de petites dimensions
- appliqué à un solide, il permet d'étudier le mouvement de son centre d'inertie

1.2. Relativité du mouvement - Notion de référentiel

On considère une voiture entrain de rouler. Pour le conducteur, les vitres, l'habitacle, la carrosserie sont immobiles. Pour un piéton sur le bord de la route, ces objets sont en mouvement. Cet exemple simple illustre une idée essentielle en mécanique : le mouvement d'un corps dépend de la « situation de l'observateur ».

On dit que le mouvement n'est pas *absolu*, mais *relatif*. Il est nécessaire de se donner « une situation de référence » pour décrire le mouvement : c'est la notion de *référentiel*.

On en donnera une définition précise à la fin du chapitre. On peut déjà retenir qu'un *référentiel associé à un observateur* est constitué par l'ensemble des points perçus comme étant fixes par cet observateur. Le référentiel permet de distinguer ce qui bouge de ce qui ne bouge pas.

Dans l'exemple de la voiture, le référentiel du conducteur est constitué par tous les éléments rigidement liés à la carrosserie : sièges, habitacle par exemple. Pour un piéton qui s'est arrêté pour regarder la voiture, le référentiel qui lui est associé est constitué du trottoir, des bâtiments autour de lui etc....

1.3. Trajectoire dans un référentiel

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions occupées par ce point au cours du temps.

D'après la relativité du mouvement, il est clair que la trajectoire d'un point dépend du référentiel où l'on se place.

2. Repérage d'un point - Bases de projection

2.1. Comment repérer la position d'un point dans l'espace

Pour décrire le mouvement d'un point M , il est nécessaire de pouvoir *repérer* sa position au cours du temps.

On définit pour cela un **repère**, noté $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et constitué :

- d'un point O fixe dans le référentiel d'étude, c'est l'**origine** du repère
- d'un ensemble de trois vecteurs non coplanaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, définissant trois directions dans l'espace : c'est la **base de projection**, généralement orthonormée directe

On repère alors la position du point M par rapport à l'origine du repère. On définit le **vecteur position** $\vec{OM}(t)$.

Il existe plusieurs bases de projection. Chacune définit un *système de coordonnées*.

On va en présenter deux : le système de coordonnées cartésiennes et le système de coordonnées cylindriques.

2.2. Produit scalaire, BOND et projection d'un vecteur selon un axe unitaire

Comme son nom l'indique, un **produit scalaire** de deux vecteurs donne un scalaire (algébrique), i.e. un nombre qui peut être positif ou négatif.

- Produit scalaire et normes des vecteurs + schéma
- Propriétés du produit scalaire
- Définition d'une BOND + **projection** d'un vecteur sur un axe de la BOND
- Définition des **composantes** d'un vecteur dans une BOND
- Norme d'un vecteur en fonction de ses composantes

2.3. Base de projection **fixe** dans R : système de coordonnées cartésiennes

La BOND $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est **fixe** dans le référentiel R depuis lequel on considère le mouvement du point M :

- l'origine O est **fixe** dans R
- la direction de chacun des vecteurs de la base est **fixe** dans R

Savoir refaire le schéma définissant le repère cartésien et les coordonnées du point M .

Les axes de la BOND peuvent être représentés en n'importe quel point de l'espace (en O et en M par ex.)

Cette base est indépendante de la position de M . Elle définit le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Vocabulaire :

- Qu'appelle-t-on les *composantes* du vecteur position ? Qu'appelle-t-on les *coordonnées* du point M ?
- Quelle est l'expression de la norme en fonction des *composantes* ?

2.4. Base de projection **mobile** : système de coordonnées cylindriques

La BOND $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est **mobile** dans le référentiel R :

- l'origine O est **fixe** dans R ; la direction du vecteur $\vec{e}_z$ est **fixe** dans R
- le vecteur *radial* $\vec{e}_r$ et le vecteur *orthoradial* $\vec{e}_\theta$ **sont mobiles** dans R (ils tournent)

Savoir refaire le schéma définissant le repère cylindrique et les coordonnées du point M .

Les axes de la BOND peuvent être représentés en n'importe quel point de l'espace (en O et en M par ex.)

Ce nouveau type de repère est défini à partir du repère cartésien.

Les directions des vecteurs radial et orthoradial *dépendent de la position du point M que l'on repère*.
 Dans le cas d'un mouvement plan, les coordonnées (r, θ) suffisent pour décrire le mouvement. On les qualifie alors de **coordonnées polaires**.

Vocabulaire :

- Qu'appelle-t-on les *composantes* du vecteur position ? Qu'appelle-t-on les *coordonnées* du point M ? Conclusion ?
- Quelle est l'expression de la norme en fonction des *composantes* ?

2.5. Dessiner un repère et le point dont on étudie le mouvement : méthode

Deux idées importantes à retenir lorsque l'on souhaite dessiner un repère et le point matériel M dont on souhaite décrire le mouvement :

*Il faut choisir le type de **repère le plus approprié au mouvement étudié**.
 Une fois le type de repère choisi, il convient de **l'orienter de manière adéquate pour simplifier les calculs**.*

On dessine toujours le point matériel dans **une position quelconque au cours du mouvement** (pas celle à $t = 0$).

Recette de grand-mère : si possible, toujours représenter cette position quelconque de telle sorte que :

- (en cartésien) x, y et z soient positifs
- (en cylindrique) z soit positif et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2.6. Dérivée temporelle d'un vecteur dans un référentiel donné

La norme ou la direction d'un vecteur pouvant varier dans le temps, on peut définir une dérivée temporelle d'un vecteur. Par exemple, la dérivée du vecteur position définit le vecteur vitesse.

On retiendra que la dérivée d'un vecteur dépend du référentiel dans lequel on se place !!

- Connaître la définition. Les propriétés de cette opération sont admises.

On retiendra *par cœur* les dérivées temporelles des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ de la base mobile en coordonnées cylindriques :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

Moyen mnémotechnique : au terme $\dot{\theta}$ près, on retrouve ces formules en remarquant que l'opération de dérivation correspond graphiquement à une rotation d'un angle $+\pi/2$.

3. Vitesse d'un point dans un référentiel

3.1. Définition

La vitesse caractérise les variations du vecteur position avec le temps. Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur position, O étant un point fixe dans R .

Ce vecteur est **tangent** à la trajectoire au point M à l'instant t , et **dirigé dans le sens du mouvement**.

Il est clair que le vecteur vitesse dépend du référentiel depuis lequel on considère le mouvement de M .

Ce vecteur peut être exprimé dans les deux types de base que l'on a défini.

3.2. Composantes et norme du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

3.3. Composantes et norme du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

4. Accélération d'un point dans un référentiel

4.1. Définition

L'accélération caractérise les variations du vecteur vitesse avec le temps. Le vecteur accélération du point M dans le référentiel R est la dérivée temporelle du vecteur vitesse.

Ce vecteur est constamment dirigé vers la concavité de la trajectoire.

4.2. Composantes et norme du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

4.3. Composantes et norme du vecteur accélération en coordonnées cylindriques

5. Exemples de mouvements usuels

Objectif de cette partie : Choisir la BOND la plus adaptée, puis exprimer les grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) en fonction des coordonnées et des vecteurs de la BOND choisie.

Méthode

- préciser le référentiel d'étude
- choisir un repère *adapté* au mouvement à étudier, et *l'orienter* convenablement
- connaissant la trajectoire, on dérive une fois pour obtenir la vitesse, une deuxième fois pour l'accélération
- connaissant l'accélération :
 - on « primitive » une fois pour obtenir la vitesse, on détermine la constante vectorielle d'intégration grâce à une condition initiale sur le vecteur vitesse
 - on « primitive » une deuxième fois pour obtenir la position (trajectoire), on détermine la constante vectorielle d'intégration grâce à une condition initiale sur le vecteur position

5.1. Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est dit **rectiligne** lorsque la trajectoire du point M est une portion de droite.

Un mouvement est dit **uniforme** lorsque la norme du vecteur vitesse est constante.

On en déduit qu'un mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par un vecteur vitesse constant, donc un vecteur accélération nul à tout instant.

5.2. Mouvement uniformément accéléré

Un mouvement est dit uniformément accéléré lorsque le vecteur accélération est constant.

- Déterminer l'équation de la trajectoire du point M pour ce type de mouvement.
- Dans quelles conditions le mouvement est-il rectiligne ?
- Citer un exemple concret.

5.3. Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire de centre C** lorsque la distance CM est constante au cours du mouvement.

- Cas général :

Déterminer l'expression de la vitesse. Définir la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire.

Déterminer l'expression de l'accélération.

➤ Cas circulaire uniforme :

Que peut-on dire de la vitesse angulaire si le mouvement circulaire est uniforme ?

Que peut-on dire du sens et de la norme de l'accélération ?

Que peut-on dire des directions respectives de la vitesse et de l'accélération ?

Exprimer l'accélération en fonction de la norme de la vitesse.

On retiendra que l'uniformité du mouvement (norme de la vitesse constante) n'implique pas un vecteur accélération nul, car la direction du vecteur vitesse change à chaque instant.

5.4. Mouvement rectiligne sinusoïdal

On considère le mouvement rectiligne d'un point M , oscillant autour d'un point O de manière sinusoïdale.

- Donner une expression mathématique de la trajectoire. Calculer la vitesse et l'accélération.
- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée de position.

6. Retour sur la notion de référentiel

Dans la littérature, on peut trouver différentes formulations pour définir un référentiel. Elles sont toutes équivalentes à la suivante, que l'on retiendra :

Un référentiel est un repère de référence, celui depuis lequel on considère le mouvement.

Remarque : le mot « considérer » veut ici dire soit « calculer » (théorie), soit « observer/mesurer » (expérimental).

Remarque 1 : Une horloge sert à repérer l'écoulement du temps. En physique newtonienne, la notion « d'horloge » est secondaire et peut être passée sous silence. Une horloge peut être vue comme le 4^e axe d'un repère d'espace-temps. Sa présence ou non ne fait aucunement la différence entre un repère et un référentiel.

Remarque 2 : Il faut être très prudent et bien *distinguer les notions de repère et de référentiel*. Un repère permet de repérer la position d'un point. Le référentiel est le repère de référence choisi pour savoir (ou voir) si un corps bouge ou non.

La différence entre ces deux concepts est flagrante dans l'exemple d'un mouvement circulaire de centre O , O étant un point fixe dans le référentiel d'étude R (repère cartésien de centre O par exemple). Pour décrire le mouvement, on choisit comme repère R' le système de coordonnées cylindriques d'origine O . Il est clair ici que ce repère R' n'est pas choisi comme référentiel « puisqu'il bouge ».

On pourrait choisir R' comme référentiel. Ce serait alors sans intérêt car le point matériel serait tout simplement immobile !

Notions clefs

Savoirs :

- Définitions point matériel, référentiel, trajectoire
- Définitions repère cartésien, cylindrique (*schémas*, décomposition d'un vecteur sur la BOND)
- Connaître les expressions des dérivées temporelles des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ du repère cylindrique
- Distinguer les notions de repère et de référentiel
- Définition du *projeté d'un vecteur* selon un autre vecteur (cf. produit scalaire !!)

Savoirs faire :

- Choisir le repère *le plus adapté* pour décrire le mouvement étudié
- *Etablir les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques*
- Appliquer la méthode d'étude en cinématiques (c.f. exemples fin du cours)
- Repérer les grandeurs algébriques (qui peuvent être > 0 ou < 0)