

1. Equation d'Euler

2. Relations de Bernoulli

- 2.1. Hypothèses préalables sur l'écoulement parfait : stationnaire, homogène et incompressible PSHI
- 2.2. Bernoulli pour un écoulement *parfait, stationnaire, incompressible, homogène PSHI*
- 2.3. Bernoulli : écoulement *parfait, stationnaire, incompressible, homogène et irrotationnel PSHII*
- 2.4. Interprétation énergétique des relations de Bernoulli
- 2.5. (Complément) Perte de charge

3. Applications des relations de Bernoulli

- 3.1. Vidange d'un réservoir : formule de Torricelli
- 3.2. Effet Venturi : de multiples applications
- 3.3. Tube de Pitot
- 3.4. Portance et effet Magnus

Intro :

La notion de couche limite lors de l'étude de la traînée sur une sphère nous a permis de définir la notion d'*écoulement parfait*. Hors de cette couche limite, on peut alors négliger tous les phénomènes diffusifs, la viscosité entre autre. L'équation de Navier-Stokes devient alors l'*équation d'Euler*. Dans le cas des écoulements incompressibles et homogènes, on en déduit les relations de Bernoulli, outils très puissants pour étudier des dispositifs concrets, avec peu de calculs.

1. Equation d'Euler

Equation d'Euler

Pour un écoulement parfait de fluide :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}P} + \vec{f}_{\text{autres}}$$

C'est tout simplement l'équation de Navier-Stokes, sans le terme de viscosité ('RFD' sans frottements internes). Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut rajouter les forces d'inertie par unité de volume.

Remarque : Relation utile pour la construction du cours, mais pas exigible :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Remarque :

Un mobile en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide ne subit ni traînée ni portance dans le modèle de l'écoulement parfait incompressible. Ce résultat est naturellement contraire à toutes les expériences ; il est paradoxal : c'est le paradoxe de d'Alembert. On lève ce paradoxe grâce à la viscosité du fluide, qui intervient toujours dans la couche limite, et se traduit par des forces sur le mobile.

2. Relations de Bernoulli

2.1. Hypothèses préalables sur l'écoulement parfait : stationnaire, homogène et incompressible PSHI

Ces hypothèses sur l'écoulement seront supposées dans toute la suite de cette partie. On supposera aussi que la seule force agissant à distance est la pesanteur, et que le référentiel d'étude est galiléen.

❖ Rappeler la définition de chacun des termes de l'hypothèse

*Avec ces hypothèses, la masse volumique est indépendante de la position et du temps (donc constante)
Ceci est valable même pour un écoulement de gaz, considéré incompressible tant que $\left(\frac{v_{\text{fluide}}}{c_{\text{son}}}\right)^2 \ll 1$*

2.2. Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, homogène PSHI

Relation de Bernoulli (cas rotationnel)

Dans un écoulement parfait, stationnaire, homogène, incompressible :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

pour tout couple de points (A, B) situés sur une même ligne de courant

❖ La démontrer en calculant la circulation de l'équation d'Euler sur une ligne de courant allant de A à B

Remarque :

La statique des fluides dans un liquide donnait $P + \rho g z = C^{te}$ en tout point du fluide.

La relation de Bernoulli ressemble à cela, mais est valable :

- pour un fluide en mouvement vérifiant les hypothèses PSHI
- notamment valable pour un gaz dans ces conditions
- mais valable sur une ligne de courant uniquement

2.3. Bernoulli : écoulement parfait, stationnaire, incompressible, homogène et irrotationnel PSHII

Relation de Bernoulli (cas irrotationnel)

Dans un écoulement parfait, stationnaire, homogène, incompressible, et irrotationnel :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

pour tout couple de points (A, B) dans l'écoulement

❖ La démontrer en calculant la circulation de l'équation d'Euler sur un chemin quelconque allant de A à B

2.4. Interprétation énergétique des relations de Bernoulli

Calculer la circulation de la RFD le long de la trajectoire du système étudié (cf. 1^{ère} version de Bernoulli, celle considérée le long d'une ligne de courant, qui s'identifie à la trajectoire de la particule de fluide car régime stationnaire) n'est pas sans rappeler la démonstration du TEC en mécanique du point. Dans Bernoulli, un troisième terme apparaît du côté des stocks.

(cf. article « Dépression sous la coque » extrait de *Les lois du monde* de Courty et Kierlik)

Interprétation énergétique de Bernoulli

Dans un écoulement PSHI, la pression apparaît comme un 3^e stock d'énergie potentielle volumique.

Lorsque l'on reviendra sur l'expression du premier principe en écoulement stationnaire (révision PCSI, utilisé pour étude machines thermiques), on verra alors que le terme de pression de Bernoulli se retrouve dans l'enthalpie.

2.5. (Complément) Perte de charge

Si l'on retire aux hypothèses de Bernoulli l'hypothèse parfait, le travail des forces de viscosité diminue le stock d'énergie emmagasiné par le fluide. Ce stock s'appelle parfois « la charge ». On parle donc de pertes de charge.

La relation de Bernoulli devient alors :

$$\Delta \left(P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z \right) = -C_0$$

où C_0 est « la perte de charge » (estimable numériquement à partir d'abaques) et Δ la variation du stock d'énergie entre les deux positions considérées.

Le cas Bernoulli se retrouve bien-sûr en prenant $C_0 = 0$.

3. Applications des relations de Bernoulli

3.1. Vidange d'un réservoir : formule de Torricelli

Un réservoir de grande section S_0 se vide à travers un trou de section $S_1 \ll S_0$, situé sur le côté en bas du réservoir. On cherche la vitesse du fluide à la sortie de l'orifice.

- ❖ Justifier qualitativement que l'hypothèse stationnaire est raisonnable
En réalité, il n'est pas possible à ce stade de justifier rigoureusement l'hypothèse stationnaire, mais aux concours il est possible que vous tombiez sur cette question préliminaire
- ❖ Montrer que la relation entre la vitesse v et la hauteur de fluide h dans le réservoir est identique à la formule reliant la vitesse d'un point matériel au niveau du sol, celui-ci ayant été lâché d'une hauteur h .
- ❖ En invoquant une loi fondamentale, établir l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'eau $h(t)$
- ❖ En déduire la durée totale de vidange, en fonction de la hauteur d'eau initiale H
- ❖ Pour valider à présent l'hypothèse stationnaire, évaluer en ordre de grandeur le terme d'accélération locale de l'équation d'Euler, ainsi que le terme de gradient regroupant tous les autres termes. Comparer ces deux ordres de grandeurs et montrer que l'hypothèse stationnaire est valide à condition que $\frac{S_1}{S_0} \ll 1$
- ❖ Imaginons que l'orifice de sortie soit connecté à une conduite de faible diamètre, dans laquelle la viscosité de l'écoulement ne peut plus être négligée. Comment adapter la présente étude ? La formule $v = \sqrt{2gh}$ est-elle encore valable ?

3.2. Effet Venturi : de multiples applications

On considère une conduite passant d'un diamètre à un autre, l'évolution du diamètre ne se faisant que sur une petite portion de la conduite, que l'on appelle goulot d'étranglement. On *précisera* les hypothèses nécessaires aux calculs.



On note S_1 la section au niveau de l'étranglement, et S_0 la section en-dehors (connues). On note P_0 et v_0 les champs en amont, supposés uniformes. On note P_1 et v_1 les champs au niveau de l'étranglement.

- ❖ Montrer que la vitesse du fluide est plus grande là où le diamètre est le plus petit
- ❖ Exprimer $(P_1 - P_0)$ en fonction de v_0 , S_0 et S_1 . En déduire que $P_1 < P_0$

- ❖ Si c'est de l'eau qui circule, expliquer pourquoi des bulles de vapeur d'eau peuvent apparaître dans certains cas (phénomène de cavitation)
- ❖ Expliquer comment la mesure de $(P_0 - P_1)$ permet de connaître le débit de l'écoulement
- ❖ Des tubes verticaux, ouverts à l'air libre, sont insérés sur la conduite en amont du rétrécissement et au niveau du rétrécissement. Expliquer en quoi les niveaux d'eau dans ces tubes permettent de mesurer la pression de l'écoulement au niveau du tube (NB : dans cette nouvelle situation, pour éviter une discussion trop poussée sur la modélisation, on ne considère plus la pression comme uniforme sur une section de l'écoulement. P_1 et P_0 sont alors les pressions sur l'axe de la conduite).

Cet effet s'appelle ***l'effet Venturi*** : une vitesse plus élevée du fluide provoque une chute de pression. Il peut être mis en évidence avec une simple feuille de papier. Il est utilisé dans de nombreux dispositifs :

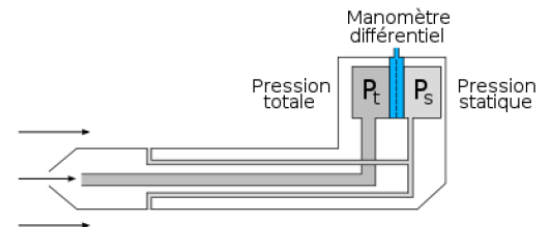
- comme débitmètre dans une canalisation
- comme pompe rudimentaire : trompe à eau en chimie
- pour vaporiser des liquides (pistolet à peinture)
- pour plaquer les voitures de courses au sol

3.3. Tube de Pitot

Un tube de Pitot disposé sur un avion permet de mesurer la vitesse de l'avion. Cela revient à mesurer la vitesse de l'air autour de la sonde.

- ❖ En négligeant la différence d'altitude entre les deux points de prise de pression, expliquer comment la différence de pression $P_t - P_s$, mesurée par le manomètre différentiel, permet de mesurer la vitesse V_∞ du fluide loin en amont de la sonde ?

On distingue dans ce dispositif « la pression statique », « la pression dynamique » et « la pression totale » (ou « pression de stagnation »). On rappelle que Bernoulli ne peut être utilisé pour l'air que si la vitesse est inférieure à 0,3 Mach.



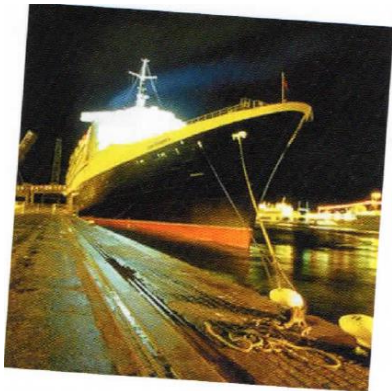
3.4. Portance et effet Magnus

L'effet Venturi permet de comprendre qualitativement pourquoi une aile d'avion « porte » l'avion. Il existe une dépression au-dessus de l'aile, où des cartes de champ montrent que l'air va plus vite (tubes de courant rapetissent), du fait du profil et/ou de l'inclinaison de l'aile. Même s'il n'apparaît pas directement dans le raisonnement qualitatif ci-dessus, le phénomène de viscosité reste essentiel dans l'existence de la portance (il influence l'allure des lignes de champ). Une vidéo bien faite de David Louapre : https://youtu.be/r-ESaj_4ujc
L'effet Magnus est un effet de portance provoqué par rotation de l'objet sur lui-même. Il permet de comprendre l'effet sur la trajectoire quand on « brosse » un coup franc au football, on « lift » une balle au tennis ou on la « coupe ».

Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.

Illustration et article :

- *Soulèvement feuille de papier horizontale lorsque l'on souffle par-dessus*
- *Rapprochement de deux feuilles parallèles lorsque l'on souffle au milieu*
- *Article Courty et Kierlik « Dépression sous la coque »*



Dépression sous la coque

*Dans les passes et les détroits, les gros navires
doivent ralentir sous peine de toucher le fond :
leur vitesse fait qu'ils se «surenfoncent» dans l'eau.*

Lorsqu'en 1992, le *Queen Elizabeth II*, s'échoue dans le Vineyard Sound (détroit du Vignoble) au large de la Nouvelle-Angleterre, les marins locaux s'étonnent : le plus grand paquebot du monde naviguait pourtant dans une zone assez profonde. Une rapide enquête suggéra un coupable qui n'en était pas à son coup d'essai : non seulement il avait déjà provoqué l'échouage de barges dans la Gironde, mais, au cours des années 1960, il avait entraîné le naufrage de trois grands navires dans les grands lacs américains. C'en était trop ! Une enquête internationale fut lancée qui confirma la culpabilité de... l'effet Venturi, phénomène physique connu depuis deux siècles. Notre enquêteur a repris le dossier.

Les marins connaissent l'effet Venturi sous les navires : ils le nomment «surenfoncement». Hélas, notre enquêteur en ignorait le mécanisme : aussi étudia-t-il les différentes formes, cinétique et potentielle, d'énergie mécanique dans un fluide. Ainsi, lorsque de l'eau chute, l'énergie potentielle due à la hauteur des masses d'eau se transforme progressivement en énergie cinétique. En haut, l'énergie potentielle de l'eau est maximale tandis que son énergie cinétique et sa vitesse sont faibles ; en bas, c'est le contraire. Cette transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique est mise à profit pour récupérer de l'énergie dans les roues à aubes des moulins de rivière.

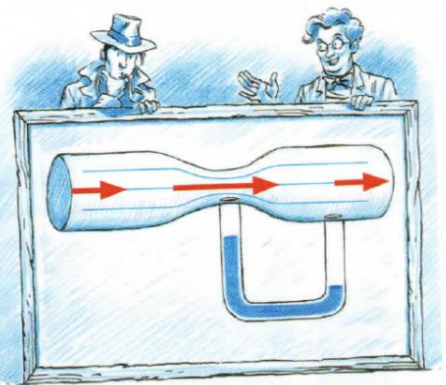
Toutefois, cette technique primitive est peu efficace, car les masses d'eau cascaded et se dispersent inutilement. Dans les centrales hydro-électriques d'aujourd'hui, on transforme l'énergie potentielle due à la hauteur en une autre forme d'énergie liée à la pression. Pour cela, on introduit l'eau dans une conduite forcée qui guide l'eau vers une turbine située beaucoup plus bas. Le débit d'eau qui traverse n'importe quelle section de cette canalisation est constant ; si la section est la même tout au long de la conduite, la vitesse de l'eau – égale au débit divisé par la section – est la même du haut en bas. L'énergie cinétique du fluide reste donc constante durant la descente. En revanche, la pression augmente avec le dénivelé et atteint son maximum au point le plus bas de la conduite. Ainsi, en négligeant les frottements, le liquide sous faible pression en haut de la conduite est transformé en un fluide sous pression qui actionne la turbine en contrebas.

Une énergie locale

En étudiant ces exemples, l'enquêteur prit conscience que, dans un fluide, la pression en un point constitue une forme d'énergie «locale». Comment cette énergie liée à la pression participe-t-elle aux échanges d'énergie dans le fluide? Pour le savoir, l'enquêteur consulta un physicien, qui lui parla de Daniel Bernoulli. En 1734, le physicien suisse résolut la question en exprimant la conservation de l'énergie au sein d'un fluide incompressible qui s'écoule sans frotter ni tourbillonner. L'équation de Bernoulli stipule que la somme des énergies cinétique et potentielle d'un élément de fluide, augmentée par le produit du volume de cet élément par la pression qui règne en son sein, est une grandeur conservée. Or, lorsqu'un fluide s'écoule sur une pente, traverse un étranglement, par exemple, les vitesses et les altitudes des éléments de volume qui le constituent sont modifiées. Ainsi, en chaque élément de volume, un transfert a lieu entre l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie liée à la pression. En d'autres termes, si l'on accélère ou ralentit l'écoulement fluide en un lieu, on y diminue la pression ou on l'augmente.

Lorsque l'énergie potentielle de pesanteur est quasi constante, l'équation de Bernoulli relie alors directement la différence de pression entre deux endroits du fluide à la variation d'énergie cinétique entre ces deux mêmes endroits. Cette différence de pression est proportionnelle au carré de la vitesse. Ainsi, la pression en un lieu du fluide est d'autant plus faible que la vitesse d'écoulement y est élevée! Lorsqu'on accélère un fluide, on y diminue la pression là où la vitesse d'écoulement augmente. Ce phénomène – l'effet Venturi – porte le nom du physicien italien Giovanni Battista Venturi, qui l'étudia de près à la fin du XVIII^e siècle. Il est par exemple utilisé dans les trompes à eau des laboratoires de chimie. Pour pomper, on y exploite l'aspiration induite par l'effet Venturi au niveau de l'étranglement d'un tuyau parcouru par de l'eau.

Le physicien consulté illustra son propos par le cas du «bruit des artères». Il arrive que la section d'un canal sanguin soit réduite par un dépôt de particules de graisse. Le sang qui chemine dans l'artère en amont accélère alors au niveau du rétrécissement, ce qui y diminue la pression sanguine. Quand une artère est à moitié bouchée, la vitesse sanguine double, passant typiquement de un à deux mètres par seconde. Cette variation réduit la pression au niveau du rétrécissement d'environ 1600 pascals, soit 12 millimètres de mercure. Une telle baisse de pression annule parfois la surpression qui dilate les artères (et elles doivent rester dilatées!). Dans certains cas extrêmes, la pression extérieure excède la pression de l'artère, laquelle se pince.



1. L'effet Venturi se produit quand un fluide incompressible traverse un étranglement : à débit constant, la vitesse augmente dans l'étranglement, et la pression baisse.

Le sang ne passant plus, la pression sanguine augmente, ce qui finit par provoquer la réouverture de l'artère ; celle-ci se pince à nouveau dès que du sang y circule à grande vitesse, etc. Cette succession de fermetures et d'ouvertures de l'artère produit une palpitation caractéristique, que les médecins identifient à l'aide de leurs stéthoscopes.

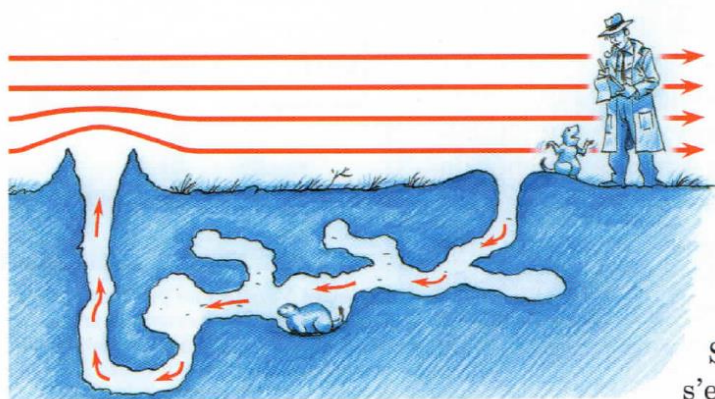
Effet Venturi en extérieur

L'enquêteur écoutait, inquiet. Ravi d'avoir un public si attentif, le physicien lui expliqua que s'il voulait résoudre son problème, il lui fallait d'abord comprendre les techniques d'aération des... chiens de prairie. Quelque peu interloqué, l'enquêteur se rendit dans la prairie Nord-américaine à la rencontre de ces cousins des écureuils. Astucieux ingénieurs, les chiens de prairie aèrent leurs terriers grâce à l'effet Venturi. Ils construisent pour cela deux types d'entrées : les unes hautes et en forme de cratère, les autres, plus basses et en forme de dôme. Pourquoi? En hauteur, la vitesse du vent est la même dans toute la plaine. Au voisinage du sol, les masses d'air accélèrent pour contourner par le haut les obstacles qu'elles rencontrent. La vitesse de l'air est plus grande au-dessus des cratères qu'au-dessus des dômes et la pression est légèrement inférieure au-dessus d'une entrée en forme de cratère qu'au-dessus d'une entrée en forme de dôme. Cette différence engendre un courant d'air au sein des galeries du terrier, lequel apporte l'oxygène vital aux familles de chiens de prairie.

2. Pour aérer leurs terriers, les chiens de prairie construisent des entrées en forme de cratère. Le vent accélère pour contourner ces obstacles, de sorte que la pression chute juste au-dessus de ces orifices, ce qui crée un appel d'air et une ventilation dans le terrier.

L'enquêteur avait enfin compris : les terriers de chiens de prairie sont plongés dans le courant aérien comme des coques de navires le sont dans le courant marin! Dans le cas des bateaux, l'équivalent du vent de la prairie est le courant d'eau sous la coque résultant de la progression du navire. Pour un observateur sur

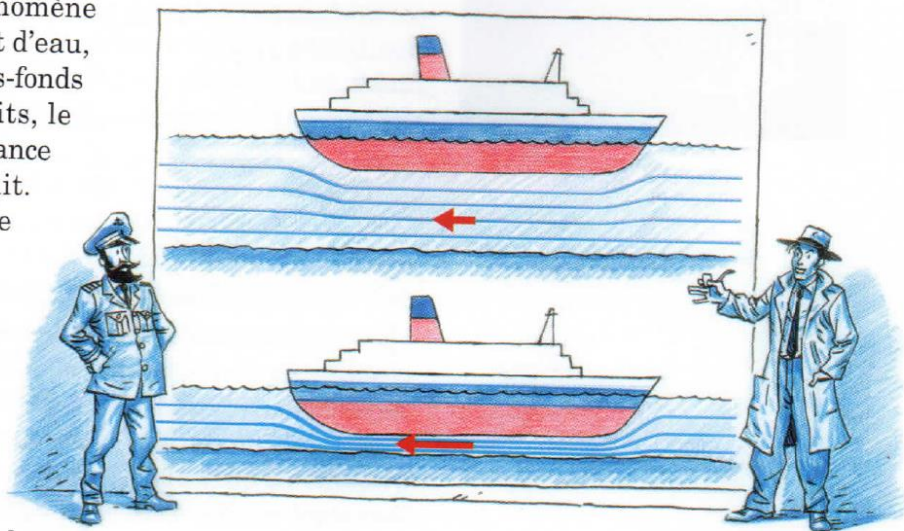
le bateau, l'eau arrive vers la proue à débit constant et à la vitesse du navire. Comme le long des filets de vent autour des entrées de terriers, la vitesse de l'eau augmente sur les lignes de courant qui accélèrent pour contourner la carène sur les côtés et par en dessous. Ainsi, sous la coque, la pression est d'autant plus basse que la vitesse du courant est grande. Or, la hauteur immergée d'un bateau est celle pour laquelle la résultante des forces de pression sur la carène équilibre son poids. Si la pression baisse sous la coque, le bateau s'enfonce : il se «surenfonce» comme disent les



marins. Si, en eau profonde, le phénomène n'augmente que faiblement le tirant d'eau, il en va tout autrement sur des hauts-fonds ou dans un canal. Dans ces endroits, le «clair sous quille», c'est-à-dire la distance entre la carène et le fond, est réduit. Les eaux ne disposent donc que de peu de place pour contourner la carène, et elles accélèrent d'autant plus. Le phénomène est amplifié lorsque le navire fend les flots à grande allure.

Maintenant qu'il avait saisi, l'enquêteur pouvait reconstituer l'échouage du *Queen Elizabeth II*! L'équation de Bernoulli indique que le surenfoncement augmente avec le carré de la vitesse du bateau, donc très fortement. Toutefois, comment le calculer exactement quand on ne maîtrise pas l'ensemble des paramètres qui font varier les vitesses de l'eau sous la coque : clair sous quille (variable), profils de carène (compliqués), turbulences, frottements? Pragmatiques, les marins emploient aujourd'hui des formules empiriques. Mises au point dans les années 1970, elles furent confirmées récemment grâce à des mesures précises de positionnement par GPS.

Appliquant ces formules aux 66 000 tonnes du *Queen Elizabeth II* et à ses 10 mètres de tirant d'eau (longueur 294 mètres, largeur 32 mètres), l'enquêteur obtint alors plusieurs ordres de grandeurs impressionnants. Le premier correspond au cas où le bâtiment navigue à 5 nœuds (10 kilomètres par heure) dans des eaux étendues d'une profondeur inférieure à 14 mètres : le surenfoncement ne vaut alors que 10 centimètres. Toutefois, il atteint 50 centimètres lorsque le navire avance à 10 nœuds et 2,2 mètres lorsqu'il croise à 20 nœuds. Lorsqu'il s'est échoué, le *Queen Elizabeth II* filait à 25 nœuds, ce qui a pu augmenter son tirant d'eau d'environ 3,5 mètres. Si son clair sous quille n'était alors que de 3 ou 4 mètres, l'accident était programmé! Dans les détroits, les canaux ou les chenaux, la vitesse des gros bâtiments est limitée par des règlements, afin d'éviter le surenfoncement. Le pilote ne pouvait ignorer à quelle vitesse maximale le grand paquebot pouvait avancer dans le Vineyard Sound. Pourtant, le capitaine a quand même lancé son bâtiment à 25 nœuds. La commission d'enquête a conclu que l'accident, qui a causé 13,5 millions de dollars de dégâts à la coque du *Queen Elizabeth II*, résultait d'un «manque de communication sur le pont».



3. L'effet Venturi diminue les pressions sous la carène des navires en marche, ce qui les «surenfonce». Le phénomène est très dangereux pour les gros bâtiments sur tous les hauts-fonds.