<u>Annexe</u> :
Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire, éléments de surface, élément de volume

<u>Rappel</u> : « élémentaire » en physique signifie « infiniment petit ».

<u>Intro</u> : On revient ici sur quelques notions fondamentales de PCSI concernant les trois systèmes de coordonnées. L'essentiel est de savoir exprimer de manière autonome :
- le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ d'un point M
- les surfaces élémentaires $\overrightarrow{dS}$
- les volumes élémentaires $d\tau$

1. <u>Définitions préalables</u>

1.1. <u>Distinction entre « les composantes » et « les coordonnées » d'un vecteur</u>

Les ***coordonnées*** d'un vecteur sont les <u>trois nombres permettant</u> de repérer la pointe du vecteur (point M sur les schémas ci-dessous) lorsque celui-ci est tracé à partir de l'origine O du repère :
- $M(x, y, z)$ en cartésien
- $M(r, \theta, z)$ en cylindrique
- $M(r, \theta, \varphi)$ en sphérique

Les ***composantes*** d'un vecteur sont les trois <u>termes de la décomposition du vecteur</u> dans la Base Orthogonale Normée Directe (BOND, my name is) :
- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$: le système cartésien est le seul pour lequel les projections des composantes (i.e. les coefficients devant les vecteurs unitaires) sont égales aux coordonnées
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$ en cylindrique : l'angle θ est « caché » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ en sphérique : les angles θ et φ sont « cachés » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$

1.2. Définition du déplacement élémentaire

Le vecteur $\overrightarrow{dOM}$ est défini comme étant le ***déplacement élémentaire*** du point M ***causé par les variations élémentaires de ses trois coordonnées***. L'expression des composantes de ce vecteur $\overrightarrow{dOM}$ en fonction des variations élémentaires des coordonnées (par exemple dx, dy, dz en cartésien) dépend du système de coordonnées (cf. ci-après).

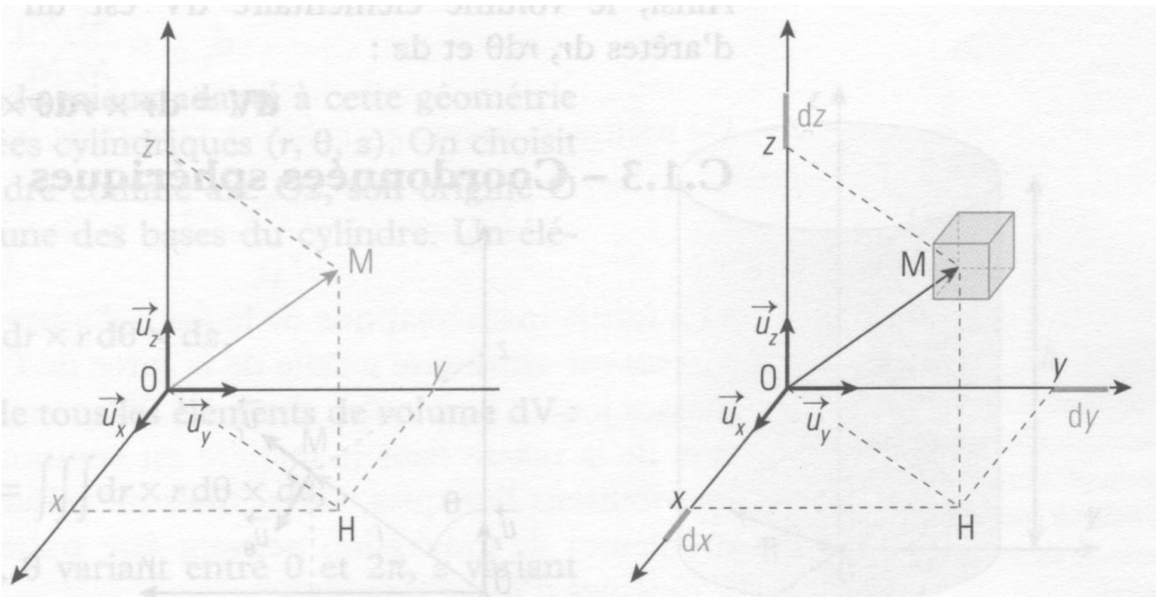
1.3. Surfaces élémentaires et volume élémentaire

Les *variations élémentaires des coordonnées* du point M ne définissent pas uniquement un déplacement élémentaire, mais aussi un volume élémentaire et six surfaces élémentaires.

On voit bien sur les schémas ci-dessous que les variations des coordonnées permettent de dessiner un volume associé : c'est ***le volume élémentaire***. Ce volume a 6 faces, qui sont les six ***surfaces élémentaires*** que l'on peut définir.

2. Expressions des quantités élémentaires dans les 3 systèmes de coordonnées

2.1. Coordonnées cartésiennes

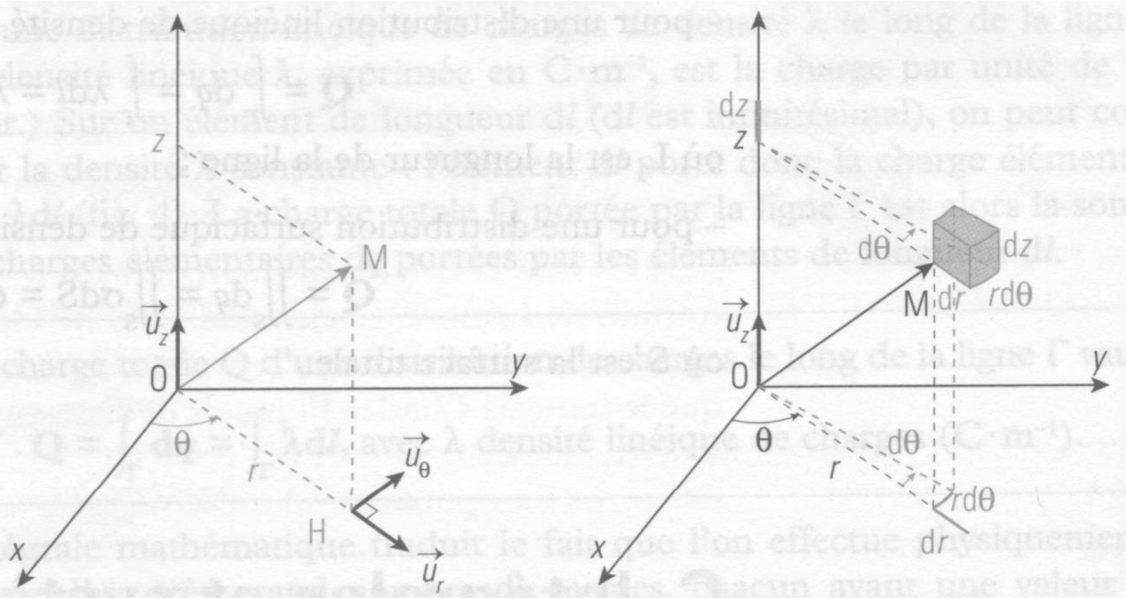


- En repérant le déplacement élémentaire sur le dessin, vérifier que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

- A l'ordre le plus bas non nul, les surfaces sont des carrés et le volume est un cube. En déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires $\overrightarrow{dS}$ en fonction des composantes dx, dy, dz du déplacement élémentaire

2.2. Coordonnées cylindriques



Si les trois déplacements élémentaires avaient été assimilés localement à leur tangente (dessinés « au 1er ordre »), ils seraient rectilignes. En outre, la base étant orthogonale, les trois composantes du déplacement élémentaire seraient orthogonales entre elles. Le volume élémentaire engendré par les variations des coordonnées cylindrique serait alors un **CUBE**, et ses faces des **CARRES**.

Pour plus de clarté sur les dessins ci-dessus, la courbure des déplacements élémentaires a été représentée (dessin à l'ordre 2). Mathématiquement, on se limite le plus souvent à l'ordre le plus bas non nul : il faut donc ici ***s'imaginer un CUBE et des faces CARREES***.

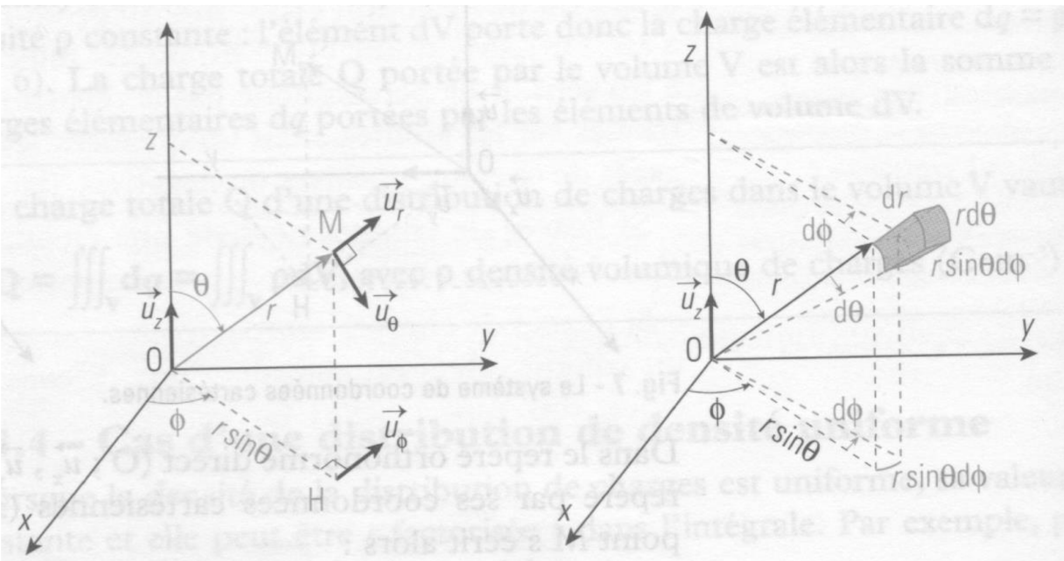
❖ En s'aidant du dessin, vérifier que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

❖ Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires $\overrightarrow{dS}$ en fonction des projections $dx, rd\theta, dz$ du déplacement élémentaire

2.3. Coordonnées sphériques



❖ En vous aidant du dessin, vérifier que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + rsin(\theta)d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

❖ Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, rsin(\theta)d\varphi$ du déplacement élémentaire

3. Quelques expressions après intégration (complète ou partielle)

3.1. Surfaces et volumes infiniment petits d'ordre un

Considérons le cas d'un anneau 2D d'épaisseur infiniment petite. Sa surface est un infiniment petit d'ordre un, et non d'ordre deux comme précédemment, car cet anneau a été obtenu en intégrant la surface élémentaire $dr \times rd\theta$ selon θ. On peut d'ailleurs calculer son expression de deux manières différentes : par intégration, ou par développement limité de la différence de l'aire de deux disques.

Idem dans le cas d'une coquille sphérique.
Idem dans le cas d'un anneau cylindrique 3D.

<u>Moyen mnémotechnique</u>

*Il suffit de **multiplier** le périmètre **par l'épaisseur élémentaire** pour obtenir la surface élémentaire.*
*Il suffit de **multiplier** la surface **par l'épaisseur élémentaire** pour obtenir le volume élémentaire.*

3.2. (Complément) Démonstration par intégration des surfaces et volumes usuels

En intégrant les expressions des surfaces et volumes élémentaires, il est possible de démontrer les expressions :
- des surfaces suivantes : disque, sphère, face latérale cylindre
- des volumes suivants : cylindre, sphère

4. Comment retenir tout cela par cœur ?

Pour chaque système de coordonnées, il suffit :
- de connaître ***par cœur les composantes de*** $\boldsymbol{\overrightarrow{dOM}}$ (seul le cas sphérique est « compliqué »)
- d'en ***déduire l'expression des trois surfaces*** élémentaires $\boldsymbol{\overrightarrow{dS}}$:
  - on repère le vecteur de base orthogonal à la surface (par exemple $\overrightarrow{u_z}$ en cylindrique)
  - dS est alors le produit des déplacements selon les deux autres vecteurs de base ($dr \times rd\theta$ ici)
- d'en ***déduire l'expression du volume*** élémentaire $\boldsymbol{d\tau}$ (un cube au 1er ordre) : c'est simplement le produit des trois composantes du déplacement élémentaire