/20

CCP PSI 2008 : effet peau

B.22 [2] NB : on ne néglige pas pesanteur et en $z=h$ pression vaut P_0.

$\vec{u}_x$ selon en : BOF. On n'a pas les CL imites sur $P(x)$

$\rightarrow$ $\vec{v} = v(x,y,z,t)\,\vec{e_x}$ (en) ↳ mvt le long de plaque

$\rightarrow$ Invariance du pb par translat° selon $\vec{e_y}$ $\Rightarrow v(x,z,t)$

$\rightarrow$ Incompressibilité $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{v(z,t)}$

B.23. [5] $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v_x \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z}$ $(z+dz)$

$= v\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$

Avec formule énoncé :

$\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial(v^2)/\partial z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v\,\partial v/\partial z \end{vmatrix}$

$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}) \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \\ -v\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix}$

(CQFD)

Project° N Stokes :

$(\vec{u}_x)$: $\rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

$(\vec{u}_y)$: $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + 0 + 0 \rightarrow P(x,z)$

$(\vec{u}_z)$: $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g$

$\hookrightarrow P(x,z) = -\rho g z + \underbrace{A(x)}_{\text{C}^{\text{te}}\text{ de } z}$ (car $\rho = \text{C}^{\text{te}}$)

CL imite : $P(x, z=h) = P_0 \ \forall x$

$\forall x$, $-\rho g h + A(x) = P_0 \Rightarrow \underbrace{A(x)}_{\text{indépt } x \text{ aussi !}} = P_0 + \rho g h$

$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g (h - z)}$ [2] CQFD

---

[1] $(\vec{u}_x)$ $\boxed{\rho \dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$ car $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$

$\boxed{K = \dfrac{\eta}{\rho}}$: viscosité cinématique

↳ ou $\boxed{\nu}$ selon la version de l'énoncé

B.24 [8]

$$\boxed{\underline{f}(z).i\omega = K\,\underline{f}''(z)}$$

Trinôme : $\underline{r}^2 - \frac{i\omega}{K}\underline{r}^0 = 0$

$$\underline{r}^2 = \frac{i\omega}{K} = \frac{\omega}{K}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Sol° : $\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\underline{r} = \pm\frac{1+i}{\delta}}$$

4

$\longrightarrow \underline{f}(z) = \underline{A}e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} + \underline{B}e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$

$\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{C}^2$ $\quad \underline{A} = Ae^{j\varphi}$ $\quad \underline{B} = Be^{j\psi}$

$$\vec{\underline{v}}(t) = \boxed{Ae^{z/\delta}e^{i(\omega t + \frac{z}{\delta})} + Be^{-z/\delta}e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}}\vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{v}(z,t) = \left[Ae^{z/\delta}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta} + \varphi\right) + Be^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \psi\right)\right]\vec{u_x}}$$

3

δ en mètres car z/δ adimensionné

δ = long. caractéristique d'évol° du chp $\vec{v}$ selon $\vec{u_z}$.

B-24 bis [3] (+1)

"la t. gd" considéré comme $\sim \infty$ par énoncé. Or gd $z \to +\infty$, terme $Ae^{z/\delta}$ diverge $\Rightarrow$ $A = 0$ car v ne peut pas diverger

En $z=0$: $\vec{v}(z=0,t) = \vec{V}_{plaque}$ car fluide collé à la paroi par viscosité

$\Longrightarrow B\cos(\omega t + \psi) = V_0\cos(\omega t)\ \forall t \Rightarrow \boxed{B = V_0}$ et $\boxed{\psi = 0}$

d'où $$\boxed{\vec{v}(z,t) = V_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u_x}}$$

atténuée exponentiell^t — onde progressive harm$^{\text{ique}}$ selon $+\vec{u_z}$.

$\hookrightarrow$ pr $z = qq\delta$, fluide est immobile

Cl° : fluide en mvt seul^t dans une épaisseur proche plaque "épaisseur de peau"

B.25

$\eta = 10^{-3}$ Pl

$\delta = \left(\frac{2\times 10^3 \times 10^{-3}}{2\times 2\pi\times 10^3}\right)^{1/2} = 1{,}3$ cm

(2)

B.26

$\delta \simeq \left(\frac{2\ 10^{-2}}{2\times 10}\right)^{1/2} = 3$ cm

(1)

ondes visqueuses ne se propagent pas dans le manteau.