Electromagnétisme Chap.2 – Les équations de Maxwell

Intro : Les champs électrique et magnétique ont été introduits en PCSI à partir de la force de Lorentz, i.e. par l'effet de ces champs sur les particules chargées. ***L'électromagnétisme*** est une importante partie de la physique dont l'objectif est de ***déterminer l'évolution spatiale et temporelle des champs*** $\vec{E}$ ***et*** $\vec{B}$ en fonction des contraintes imposées par l'expérimentateur.
Ils « sont créés par / ils interagissent avec » les milieux matériels, mais contrairement aux autres champs que l'on a vu jusqu'à présent, $\vec{E}$ ***et*** $\vec{B}$ ***existent aussi dans le vide***.
Les évolutions de ces champs sont régies par les ***équations de Maxwell***, qui sont à l'électromagnétisme ce que la RFD est à la mécanique newtonienne. Elles sont les fondements de la théorie. Avec la thermodynamique et la mécanique de Newton, c'est le 3^{e} immense succès de la physique classique.

Les applications de l'électromagnétisme ? Tout ce qui n'est pas gravitationnel ou nucléaire… elle permet d'expliquer presque tous les phénomènes observables :
- la force entre électrons et protons des atomes
- liaisons entre atomes pour constituer les molécules
- toutes les propriétés chimiques sont de nature électromagnétique
- ondes électromagnétiques : radio, portables, lumière (visible, IR, rayons X, etc.)
- lois de l'optique : diffusion et absorption de la lumière, lois de Descartes
- étude des circuits électriques : permet de démontrer les lois de Kirchhoff
- comportement d'un condensateur ou d'une bobine en électronique
- machines électriques (moteurs, hacheur, onduleur, transformateur)
- aimant permanents, etc.

Bref, c'est un gros morceau. Pour ce qui concerne la physique microscopique, il est clair que l'électromagnétisme de Maxwell n'est plus valide à trop petite échelle, c'est alors la théorie quantique des phénomènes électromagnétiques qu'il faut invoquer (Quantum Electro-Dynamics, QED). Mais même à cette échelle, des modèles classique fondés sur les équations de Maxwell permettent de décrire plutôt bien (mais approximativement) certains phénomènes microscopiques.

1. Révisions de PCSI

1.1. Force de Lorentz

Le champ électromagnétique a été introduit en PCSI à partir de son effet sur les particules chargées. C'est pertinent, car l'influence de ce champ sur la matière est la seule façon dont il se manifeste à nos sens. C'est la seule façon que l'on a de le détecter.

- Rappeler l'expression de la force de Lorentz, force qui s'applique sur toute particule chargée en présence d'un champ électromagnétique

Remarque : Les phénomènes d'absorption et d'émission de photons vus en chimie ne sont pas du ressort de l'électromagnétisme de Maxwell, car ce sont des phénomènes quantiques. Il existe des descriptions classiques de ces phénomènes, fondées sur la mécanique de Newton et les équations de Maxwell. Mais ces descriptions sont approximatives et incomplètes (elles ne réussissent pas expliquer tout ce que l'on observe).

1.2. Sources du champ électromagnétique – Description de la matière

- Quelle grandeur physique est source du champ électrique ? Laquelle est source du champ magnétique ?

Avec les équations de Maxwell, on verra que $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est une autre source de $\vec{B}$, et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est une autre source de $\vec{E}$.

On notera que dans les équations de Maxwell, la matière – donc la répartition spatiale des charges libres et des courants libres – est décrite comme étant répartie continûment dans l'espace 3D (description ***volumique***). C'est la description mésoscopique la plus générale, car nous vivons effectivement dans un espace tridimensionnel. C'est celle que nous avons présenté dans les chapitres de mécanique des fluides et de diffusion.
Il existe d'autres façons de décrire une répartition continue de la matière : la description ***surfacique*** et la description ***linéique***, qui facilitent les calculs dans certains situations. Nous les verrons en temps voulu. On peut déjà noter que l'étude des circuits électriques a été faite dans la description linéique.
La description la plus fondamentale de la répartition de la matière est la description ***corpusculaire*** : la charge électrique est portée par des particules élémentaires, dont certaines sont constitutives des atomes. Nous ne l'utiliserons que très rarement.

1.3. Puissance de la force de Lorentz

- Quel champ permet d'augmenter la norme de la vitesse d'une particule chargée ?
- Quel est alors l'effet de l'autre champ ?

1.4. Deux exemples simples de mouvements

On considère le champ électrique créé par deux plaques planes en regard l'une de l'autre. C'est un condensateur plan. On suppose que le champ créé par les plaques chargées est uniforme. On rappelle que la norme du champ est reliée à la tension aux bornes du condensateur par l'expression $E = U/d$, où d est la distance entre les deux plaques. On rappelle aussi l'expression de l'énergie potentielle électrique $E_{pot} = qV$ d'une particule de charge q, placée en un point de potentiel électrique V. (NB : les relations admises ici seront démontrées plus tard)

- Un proton est placé à proximité de la plaque chargée positivement. En utilisant la méthode la plus appropriée… établir l'expression de la vitesse de la particule chargée lorsque celle-ci atteint l'autre plaque.

On considère à présent un champ magnétique uniforme créé par un dispositif extérieur. Il n'y a plus de champ électrique. On étudie le mouvement d'un proton dans ce champ magnétique. La vitesse initiale de la particule est prise dans le plan perpendiculaire au champ.

- En supposant la trajectoire circulaire et orthogonale au champ, déterminer son rayon en fonction de la norme de la vitesse initiale, de l'intensité du champ magnétique et de la valeur de la charge
- Bonus : à l'aide du repère de Frenet, montrer que la trajectoire est orthogonale au champ, et circulaire

2. Equations de Maxwell

Ces équations sont postulées, et constituent les principes qui fondent la théorie de l'électromagnétisme (équivalents des principes de Newton pour la mécanique de Newton). Les champs $\boldsymbol{\vec{E}(\vec{r},t)}$ et $\boldsymbol{\vec{B}(\vec{r},t)}$ et les répartitions de charge et de courant électriques $\boldsymbol{\rho(\vec{r},t)}$ et $\boldsymbol{\vec{j}(\vec{r},t)}$ dépendent de la position et du temps. Tant que la mécanique classique est applicable (relativité d'Einstein incluse), les équations de Maxwell sont vérifiées.

Elles ne sont plus valables en physique quantique. Pourtant de nombreuses situations microscopiques peuvent être abordées (et l'ont été historiquement) avec les équations de Maxwell. Les résultats théoriques établis ne sont alors qu'approximativement valables.

2.1. Révisions d'analyse vectorielle

- Rappeler définition de l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes
- Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire
- Rappeler le lien entre la différentielle d'un champ scalaire et son gradient

- Rappeler la définition de la divergence d'un champ vectoriel
- Enoncer (schéma à l'appui) le Théorème de « Flux – Divergence » ou Théorème de Green-Ostrogradski

- Rappeler la définition du laplacien d'un champ scalaire

- Rappeler la définition du rotationnel d'un champ vectoriel
- Enoncer (schéma à l'appui) le Théorème de « Circulation – Rotationnel » ou Théorème de Stokes

2.2. Les équations de Maxwell

Ce sont des équations locales, dont nous verrons les équivalents intégrales dans les chapitres à venir.

$$\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \qquad \boldsymbol{Maxwell-Gauss}$$
$$\boldsymbol{div(\vec{B}) = 0} \qquad \boldsymbol{Maxwell-Thomson}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \qquad \boldsymbol{Maxwell-Faraday}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \qquad \boldsymbol{Maxwell-Ampère}$$

Les constantes ε_0 et μ_0 sont liées au système d'unités ; dans le système MKSA :

ε_0 est la ***permittivité*** diélectrique du vide ; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} ;

μ_0 est ***perméabilité*** magnétique du vide ; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} H.m^{-1}$

Remarque : Les champs $\boldsymbol{\vec{E}(\vec{r},t)}$ et $\boldsymbol{\vec{B}(\vec{r},t)}$ vérifient des ***équations différentielles couplées***. Ils ne peuvent pas être étudiés indépendamment l'un de l'autre. C'est pourquoi l'on parle de ***champ électromagnétique*** $(\vec{E},\vec{B})$, les champs électrique et magnétique étant simplement deux facettes de cette entité. En physique moderne, on décrit même ce champ par une seule entité : le tenseur électromagnétique.

Remarque : Ces équations sont linéaires, on peut donc appliquer ***le principe de superposition*** aux champs électrique et magnétique.

Remarque : Une propriété générale d'analyse vectorielle nous dit que lorsque le rotationnel et la divergence d'un champ sont connus, alors le champ peut être déterminé complètement si l'on se donne des conditions initiales et des conditions aux limites.

Remarque : Comme toutes les équations différentielles, les équations de Maxwell donnent ***l'évolution*** des champs dans l'espace et dans le temps. Si initialement il n'y a pas de champ, alors les termes $\boldsymbol{\rho(\vec{r},t)}$ et $\boldsymbol{\vec{j}(\vec{r},t)}$ apparaissent bien comme les ***sources du champ électromagnétique***. Si un champ préexistant rencontre des charges et des courants, il est alors simplement modifié, pas véritablement « créé » (exemple : diffusion de la lumière par les molécules de l'air, une partie de l'onde électromagnétique incidente « rebondit » sur les molécules d'air).

2.3. <u>Compatibilité avec la loi de conservation de la charge</u>

- ❖ A partir de l'équation de Maxwell-Ampère et du formulaire d'analyse vectoriel, montrer que la conservation de la charge peut être déduite des équations de Maxwell

3. <u>(HPgm) Relations de passage du champ EMic à la traversée d'une surface</u>

On considère une surface chargée et parcourue par un courant. Cette modélisation *surfacique* de la répartition spatiale de matière (donc des charges et des courants) peut s'avérer intéressante. Nous l'utiliserons notamment lors de l'étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal (modèle métal parfait).

3.1. <u>Distribution surfacique de charge</u>

- ❖ Rappeler la définition de la charge volumique
- ❖ Rappeler la relation entre la charge totale d'un volume de l'espace et la masse volumique

A l'échelle macroscopique, la distribution volumique est la description la plus précise de la répartition de charge dans l'espace. Lorsqu'un corps électrisé possède une dimension très petite devant les autres (feuille de papier par exemple), on peut décrire la répartition de la charge par une ***distribution surfacique***. Dans l'exemple de la feuille de papier, *cela revient à négliger l'épaisseur de la feuille* devant sa longueur et sa largeur.

<u>Définition de la charge surfacique</u>

On définit une ***densité surfacique de charge σ*** à l'échelle mésoscopique, fonction des coordonnées d'espace, qui donne la quantité élémentaire de charge dQ située sur *la surface élémentaire* dS :

$$dQ \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\sigma}\, dS$$

La fonction $\boldsymbol{\sigma(\vec{r})}$ représente la *distribution surfacique de charge*.

<u>Passage de l'échelle méso à l'échelle macro</u>

La charge totale située sur une surface S est la somme des quantités élémentaires de charge :

$$\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma\, dS}$$

3.2. <u>*(Complément)* Distribution surfacique de courant</u>

Si la zone de l'espace où circule le courant possède une dimension très petite devant les deux autres, on peut considérer que le courant circule sur une surface : on parle de *distribution surfacique de courant*.

Dans cette modélisation, l'intensité est alors un débit de charge *à travers une ligne*. En tout point de cette ligne, on note $\vec{n}$ le vecteur normal à la portion élémentaire de cette ligne, et la relation entre l'intensité élémentaire et le « vecteur densité surfacique de courant » $\overrightarrow{J_S}$ s'écrit :

$$dI = (\overrightarrow{J_S} \cdot \vec{n}) d\ell$$

où $d\ell$ représente la longueur élémentaire de ligne considérée. La densité surfacique de courant est en $A.m^{-1}$.
En intégrant tout le long de la ligne de longueur L, on exprime l'intensité traversant cette ligne en fonction du vecteur densité surfacique de courant :

$$I = \int_L (\overrightarrow{J_S} \cdot \vec{n}) d\ell$$

3.3. Discontinuité du champ électromagnétique à la traversée d'une surface

Lorsque la modélisation surfacique est choisie en une zone de l'espace, ***les équations de Maxwell doivent être remplacées*** au niveau de cette surface ***par les relations de passage***. Ces relations se démontrent à partir des équations de Maxwell en faisant tendre un volume vers une surface (on fait tendre l'épaisseur du volume vers zéro). On les admettra dans ce cours.

Les limites du champ $\vec{E}$ avant et après la surface ne sont pas égales : ***le champ électrique est discontinu à la traversée d'une surface chargée.***

Les limites du champ $\vec{B}$ avant et après la surface ne sont pas égales : ***le champ magnétique est discontinu à la traversée d'une nappe de courant surfacique.***

$$\boldsymbol{\vec{E}(x = O^+) - \vec{E}(x = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{u_x}}$$
$$\boldsymbol{\vec{B}(x = O^+) - \vec{B}(x = 0^-) = \mu_0\,\overrightarrow{J_s} \wedge \overrightarrow{u_x}}$$

La composante ***tangentielle de $\vec{E}$*** *est toujours une* **fonction continue de la position.**
La composante **normale de $\vec{B}$** *est toujours une* **fonction continue de la position.**

4. Energie électromagnétique : une nouvelle forme d'énergie

4.1. Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide

A partir des équations de Maxwell, on peut établir l'équation suivante (admis).

Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique
Dans le vide :

$$\boldsymbol{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) = 0}$$

- $\boldsymbol{u_{em}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est l'énergie par unité de volume ***stockée par le champ électromagnétique*** (Jm^{-3})
- $\boldsymbol{\vec{\Pi}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ est le vecteur de Poynting, c'est un vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique (Wm^{-2}). Il représente le débit surfacique d'énergie (***la puissance surfacique***) transporté par le champ électromagnétique à travers une surface

❖ Donner l'expression reliant le vecteur de Poynting à la puissance traversant une surface

Remarque : Même en régime stationnaire (« régime statique » en EMism), le champ électromagnétique est associé à un « écoulement » d'énergie. On peut comprendre cela par analogie avec la mécanique des fluides : même lorsque le régime est stationnaire (champs indépendants du temps) il y a bien écoulement de fluide, transport de masse, d'énergie etc.

4.2. Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique en présence de charges libres

Equation locale de conservation de l'énergie électromagnétique

En présence de porteurs de charge :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la ***puissance volumique reçue par les porteurs*** de charge (Wm^{-3}), et ***fournie par le champ*** électromagnétique.

Si les porteurs « frottent » sur un milieu support (réseau de cations d'un fil de cuivre par exemple), alors c'est aussi la ***puissance volumique dissipée par effet Joule.***

Cette équation locale de conservation de l'énergie en présence d'un champ électromagnétique s'appelle aussi ***équation locale de Poynting***. Avec des mots, elle signifie que toute l'énergie perdue par le champ présent dans un volume a été :

- soit transférée aux porteurs de charge présents dans ce volume,
- soit est sortie par les surfaces délimitant ce volume

C'est un nouvel exemple d'équation locale de conservation, associée à un transport d'énergie par rayonnement électromagnétique.

Révisions de PCSI

La partie **2.4.** « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires »** introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

La partie « **Équations de Maxwell** » présente les équations de Maxwell en régime dépendant du temps. La notion de potentiel-vecteur est hors-programme mais on insiste sur le fait que le champ électrique ne dérive pas en général d'un potentiel scalaire. L'étude détaillée des ondes électromagnétiques qui prolonge cette partie est placée dans la partie « **Physique des ondes** ». On ne mentionne ici les phénomènes de propagation que pour les négliger dans le cadre des régimes lentement variables. Le cadre adopté est celui de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique, pour lequel les effets des distributions de courants dominent ceux des distributions de charges.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
5.4. Équations de Maxwell	
5.4.1. Postulats de l'électromagnétisme	
Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales.	Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. Utiliser une méthode de superposition. **Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant des capteurs inductifs.**
5.4.2. Aspects énergétiques	
Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.	Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d'énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l'optique.