Chap.6 – Distribution de courant – Champ magnétostatique

Intro :
L'expérience montre qu'un courant électrique *génère une force magnétique*, dite *force de Lorentz*, qui s'applique à toute particule chargée en mouvement. Cette force s'exprime en fonction d'un champ vectoriel : *le champ magnétique*. On notera que ce champ magnétique est de la même nature que celui généré par un aimant.

Le *courant* électrique est donc la source d'un champ *magnétique*, au même titre que la *charge* électrique est la source d'un champ *électrique*. Si les courants sont permanents (indépendants du temps), le champ est également indépendant du temps, il est alors qualifié de *magnétostatique*.

On présente ici les différentes modélisations possibles pour décrire une distribution de courant électrique. On précisera aussi la signification physique de *l'intensité électrique*.

On admettra *la loi de Biot et Savart* qui donne l'expression du champ magnétostatique créé par une distribution de courant. On discutera des propriétés de symétrie du champ et on étudiera quelques exemples.

1. Distributions de courant électrique permanent

On s'intéresse dans toute la suite du cours aux *courants dits de* ***conduction***, associés à un *mouvement d'ensemble* de porteurs de charge mobiles (électrons dans les métaux, ions dans une solution électrolytique).

On ne s'intéressera qu'aux descriptions continues de courant électrique : volumique, surfacique, linéique.

1.1. Distribution volumique de courant

A l'échelle macroscopique, la modélisation la plus générale de la matière et du courant électrique qui peut « s'y écouler » est la distribution volumique de courant. On précise tout d'abord la définition de l'intensité du courant.

Définition de l'intensité du courant

L'intensité du courant à travers une surface *est*
la quantité de charge qui traverse cette surface par unité de temps :

$$\boldsymbol{dQ \overset{\text{def}}{=} I\,dt}$$

C'est un débit, un flux de charge ($C.s^{-1}$) à travers une surface.

Lorsque l'on modélise en 3D de la charge électrique en mouvement, il est indispensable *d'identifier une surface* pour pouvoir parler « d'intensité du courant électrique ».

Vecteur densité volumique de courant

Le vecteur **densité volumique de courant électrique** $\vec{j}$ *est défini en tout point de l'espace où s'écoule la charge.*
Sa direction et son sens représentent la direction et le sens dans lequel s'écoule la charge.
Sa norme est reliée au courant élémentaire traversant une surface élémentaire centrée sur ce point :

$$dI \overset{\text{def}}{=} \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

L'intensité traversant la surface S *est égale au* **flux du vecteur densité de courant** *:*

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}$$

Commentaires *:*

- En un point d'une surface :
  - si la charge s'écoule *orthogonalement* à $\overrightarrow{dS}$, alors l'intensité élémentaire est *nulle*
  - si la charge s'écoule selon $\overrightarrow{dS}$ dans le *même sens*, l'intensité élémentaire est *positive*
  - si la charge s'écoule selon $\overrightarrow{dS}$ dans le *sens opposé*, l'intensité élémentaire est *négative.*

- Le vecteur densité volumique de courant est homogène à une intensité par unité de surface ($A.m^{-2}$). On le qualifie de « volumique » car la charge qui s'écoule est répartie dans le volume.

- De manière similaire à la charge volumique qui permet de décrire la répartition de la charge en tout point de l'espace, le *vecteur* densité volumique de courant permet de décrire la répartition du courant en tout point de l'espace.

➢ Soit un fil assimilé à un cylindre rectiligne horizontal de rayon *R* parcouru uniformément par un courant *I*. Donner l'expression du vecteur densité volumique de courant en fonction de *I* et de *R*.

1.2. *(Complément)* Distribution surfacique de courant

Si la zone de l'espace où circule le courant possède une dimension très petite devant les deux autres, on peut considérer que le courant circule sur une surface : on parle de *distribution surfacique de courant*.

Dans cette modélisation, l'intensité est alors *un débit de charge à travers une ligne*. En tout point de cette ligne, on note $\vec{n}$ le vecteur normal à la portion élémentaire de cette ligne, et la relation entre l'intensité élémentaire et le « vecteur densité surfacique de courant » $\overrightarrow{j_S}$ s'écrit :

$$dI = (\overrightarrow{j_S} \cdot \vec{n})d\ell$$

où $d\ell$ représente la longueur élémentaire de ligne considérée. La densité surfacique de courant est en $A.m^{-1}$.
En intégrant tout le long de la ligne de longueur L, on exprime l'intensité traversant cette ligne en fonction du vecteur densité surfacique de courant :

$$I = \int_L (\overrightarrow{j_S} \cdot \vec{n})d\ell$$

- Soit une « nappe de courant » assimilable à un plan de largeur L et de longueur infinie, parcourue par un courant uniforme I circulant dans le sens de la longueur. Etablir l'expression du vecteur densité surfacique de courant en fonction de I et L.

- Soit un cylindre horizontal rectiligne, de rayon R, parcouru en surface par un courant uniforme I circulant le long du cylindre. Etablir l'expression du vecteur densité surfacique de courant en fonction de I et R.

1.3. Distribution linéique de courant

Si la zone de l'espace où s'écoule le courant possède deux dimensions très petites devant la troisième, on peut considérer que le courant s'écoule le long d'une ligne : on parle de *distribution linéique de courant*.

C'est la modélisation que l'on a toujours utilisée jusqu'à présent pour les circuits !!

Dans cette modélisation, l'intensité est alors *un débit de charge à travers un point*. C'est pour cela que la définition générale de l'intensité comme « débit à travers une surface » n'avait pas été explicitée en début d'année : dans cette modélisation, la surface est tout simplement assimilée à un point.

En tout point du fil parcouru par un courant, on oriente le fil par le vecteur unitaire $\vec{u}$ tangentiel au fil, et orienté dans *le même sens* que l'intensité. Le vecteur « densité linéique de courant » s'écrit simplement : $\boldsymbol{I\vec{u}}$

1.4. Lien entre densité de courant et porteurs de charge

On admettra la relation suivante :

Relation entre $\vec{j}$ (échelle macro) et les porteurs de charges (échelle micro)

$$\boldsymbol{\vec{j} = nq\vec{v}}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le nb de porteurs par unité de volume (m^{-3})
où $\boldsymbol{q}$ est la charge d'un porteur (C)
où $\boldsymbol{\vec{v}}$ est la vitesse d'ensemble des porteurs (ms^{-1}) – pensez à un fluide qui s'écoule

NB : Cette expression est aussi valable pour des porteurs de charge négative (électrons dans un métal).
NB : Il suffit d'additionner les différents courants s'il existe plusieurs types porteurs de charges.

1.5. Invariance, symétrie et antisymétrie plane d'une distribution de courant

Une distribution de courant peut être invariante par translation selon un axe, ou par rotation autour d'un axe. Cela signifie que le vecteur densité de courant est invariant selon ces transformations.

- On considère les circuits filiformes suivants : fil rectiligne infiniment long, spire circulaire, solénoïde infiniment long. Quelles sont les invariances de ces distributions ?

Une distribution de courant possède un *plan de symétrie*, si tout point *P* de la distribution a une image *P'* appartenant à la distribution, et si $\vec{j}(P') = sym[\vec{j}(P)]$.

Une distribution de courant possède un *plan d'antisymétrie*, si tout point *P* de la distribution a une image *P'* appartenant à la distribution, et si $\vec{j}(P') = -sym[\vec{j}(P)]$.

- Repérer les symétries et invariances dans les cas suivants :
    - fil rectiligne infiniment long
    - cylindre rectiligne infini, de densité volumique de courant uniforme, dirigée selon l'axe
    - (nappe plane de courant confondue avec le plan (yOz) et de densité de courant $\overrightarrow{J_S}$ selon $\overrightarrow{u_z}$)

2. Champ magnétostatique créé par une distribution de courant

2.1. Force de Lorentz – Définition du champ magnétique

En présence d'une distribution de courant, une particule chargée q, de vitesse $\vec{v}$ et extérieure à la distribution, subit une force magnétique, *la force de Lorentz*, d'expression :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{B}$ est le *champ magnétique créé par la distribution de courant*.

Contrairement au champ électrostatique que l'on a défini à partir de la force de Coulomb (postulée), on définit la force de Lorentz à partir du champ magnétique. Dans le cas de courant permanent, on va alors postuler l'expression du champ magnétostatique généré par ces courants.

2.2. Expression du champ magnétostatique – Loi de Biot et Savart (admise)

Seule l'expression du champ créé par une distribution linéique de courant est au programme. On considère donc un circuit filiforme parcouru par un courant *I*.

Le champ élémentaire $\overrightarrow{dB}(M)$, créé en un point M de l'espace, par un élément $\overrightarrow{d\ell}$ du circuit situé au point P est donné par ***la loi de Biot et Savart*** *:*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{dB}}(\boldsymbol{M}) = \frac{\boldsymbol{\mu_0}\, \boldsymbol{I}\, \overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{u_{PM}}}}{\boldsymbol{4\pi\, PM^2}}$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ s'exprime en Teslas (T).
La constante $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H.m^{-1}$ est la *perméabilité du vide*.

Commentaires :

- L'élément de circuit $\overrightarrow{d\ell}$, tangent au fil au point *P*, est *orienté dans le même sens* que le courant *I*.

- Pour se souvenir facilement de cette formule, il suffit de noter l'analogie formelle avec l'expression du champ électrostatique généré par une distribution linéique de charge, avec les correspondances :

$$« \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} \leftrightarrow \boldsymbol{\mu_0} » \quad \text{et} \quad « \boldsymbol{\lambda\, d\ell} \leftrightarrow \boldsymbol{I}\overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} \wedge »$$

*La loi de Biot et Savart postule aussi que le champ **total** est obtenu par **superposition** des champs élémentaires, créés par chaque portion de la distribution **filiforme** D :*

$$\vec{B}(M) = \int_{P \in D} \frac{\mu_0 \, I \, \overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{u_{PM}}}{4\pi \, PM^2}$$

- *(Compléments)* En poursuivant l'analogie formelle avec le cas électrostatique, donner l'expression du champ magnétostatique créé par une distribution volumique de courant ; puis une distribution surfacique.

2.3. Existence et continuité du champ magnétostatique

On admettra les propriétés suivantes :

- distribution volumique de courant : le champ magnétostatique est défini et continu en tout point
- distribution surfacique : le champ n'est pas défini en tout point d'une distribution surfacique de courant (*discontinuité* à la traversée de la surface)
- distribution linéique (circuit filiforme) : le champ n'est pas défini en tout point d'une distribution linéique de courant (le champ *diverge* en ces points)

2.4. Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

De manière similaire au champ électrostatique, le champ magnétostatique possède les mêmes invariances que la distribution de courant qui le génère. Repérer ces invariances permet de préciser la *dépendance du champ avec les coordonnées du point* M *où on le calcule*.

Concernant les symétries et antisymétries planes, les propriétés du champ magnétostatique sont *inversées* par rapport à celle du champ électrostatique.

Propriété du champ $\vec{B}$ *(plan de symétrie Π)*

$$M' = sym_{\Pi}[M] \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M') = -sym_{\Pi}\left[\vec{B}(M)\right]$$

Corollaire

$$\boldsymbol{M \in \Pi \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M)} \textbf{\textit{ est orthogonal au plan }} \boldsymbol{\Pi}$$

Propriété du champ $\vec{B}$ *(plan d'antisymétrie Π_a)*

$$M' = sym_{\Pi_a}[M] \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M') = sym_{\Pi_a}\left[\vec{B}(M)\right]$$

Corollaire

$$\boldsymbol{M \in \Pi_a \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(M)} \textbf{\textit{ appartient au plan }} \boldsymbol{\Pi_a}$$

- Déterminer la direction du champ et sa dépendance avec les coordonnée du point M :
  - champ créé par un fil rectiligne infiniment long
  - champ créé sur l'axe d'une spire circulaire
  - champ créé sur l'axe d'un solénoïde infiniment long
  - champ créé par une nappe de courant (xOy) de densité de courant selon (Ox)

2.5. Topographie du champ magnétostatique

Les définitions d'une ligne et d'un tube de champ sont celles qui ont été données dans les chapitres précédents.

- Grâce à la loi de Biot et Savart, repérer le sens des lignes de champ à proximité de l'élément de circuit qui génère le champ (que l'on assimilera à un fil élémentaire rectiligne).

Le champ magnétostatique tend à s'enrouler autour des lignes de courant qui le génèrent.
Le sens et la direction du champ se retrouvent grâce à la ***règle du tire-bouchon****.*

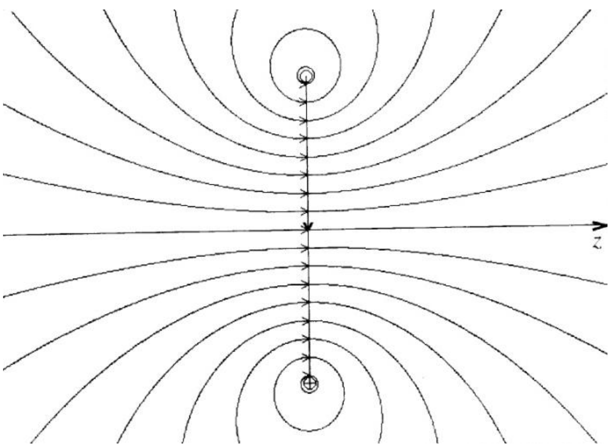
NB : C'est une différence majeure avec le champ électrostatique, qui tend à diverger depuis (ou à converger vers) les zones chargées de l'espace

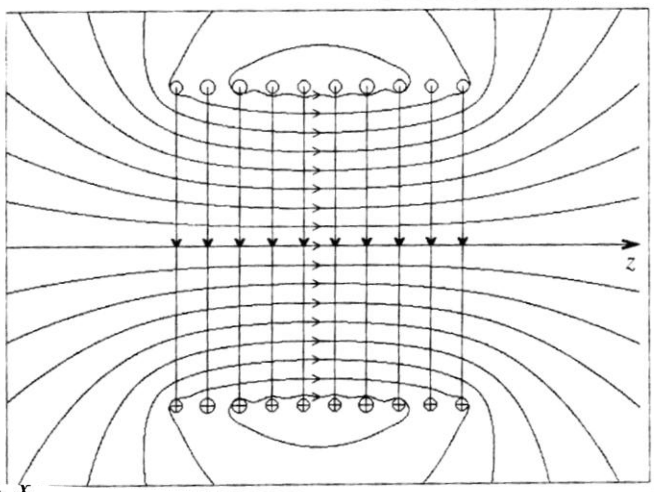
- Comme pour le champ électrostatique, les lignes de champ ne peuvent pas se couper, sauf en un point de champ nul, ou en un point où le champ n'est pas défini.

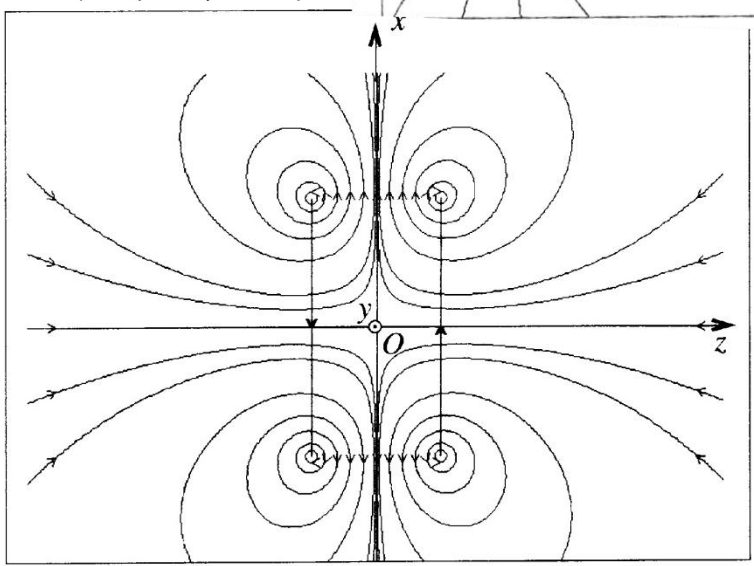
- Contrairement au champ électrostatique, les lignes de champ peuvent se refermer sur elles-mêmes : le champ magnétostatique n'est donc pas à circulation conservative.

- Contrairement au champ électrostatique, les lignes de champ magnétique ne peuvent pas diverger depuis (ou converger vers) un point (relié au fait que le champ magnétostatique est à flux conservatif).

Quelques exemples de cartes de champ







3. Exemples de calcul de champ magnétostatique

3.1. Fil rectiligne infini

- A l'aide de la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétostatique en tout point de l'espace, créé par un fil rectiligne parcouru par un courant I. Pour calculer l'intégrale, on introduira l'angle α sous lequel un point P est vu depuis le point M.

- Application numérique : $I = 10\ A, r = 2\ cm$

- Dessiner l'allure des lignes de champ

3.2. Champ sur l'axe d'une spire circulaire

- Idem. On introduira l'angle α sous lequel un point P est vu depuis le point M.

Notions clefs

Savoirs :

- Vecteur densité de courant (différentes modélisations) + lien avec l'intensité du courant
- Relation densité volumique de courant / porteurs de charge (densité de porteurs, charge des porteurs)
- Loi de Biot et Savart (cas distribution linéique) : champ élémentaire + superposition pour champ total
- Champ magnétostatique discontinu à la traversée d'une surface + diverge sur un circuit filiforme
- Invariances et symétrie / antisymétrie plane : conséquences sur le champ magnétostatique
- Lignes de champ tendent à s'enrouler autour des lignes de courant (sens : **règle tire-bouchon**)

Savoirs faire :

- Etablir la relation entre le vecteur densité de courant et l'intensité traversant une surface (volumique)
- (Redémontrer la relation entre vecteur densité volumique de courant et porteurs de charge (volumique))
- Repérer les invariances du courant ; en déduire la dépendance du champ avec les coordonnées
- Repérer les symétries / antisymétries planes ; en déduire la direction du champ