Chap.7 – Théorème du moment cinétique

Intro :
On va introduire dans ce chapitre un nouveau théorème de mécanique du point. Ce sera le dernier. Ce nouvel outil est particulièrement adapté aux mouvements de rotation, c'est le Théorème du Moment Cinétique (TMC).

Il nécessite la définition de deux nouvelles grandeurs fondamentales : *le moment d'une force*, et *le moment cinétique d'un point matériel*. Ces grandeurs sont définies par rapport à un point, ou par rapport à un axe.

Ces nouvelles grandeurs permettent d'aborder sous un angle nouveau le mouvement d'un point matériel. Dans certaines situations, ce nouveau point de vue va nous permettre de dégager plus facilement les propriétés du mouvement étudié. Le cas particulier des mouvements à force centrale en est un bon exemple. Dans le prochain chapitre, le TMC sera un outil puissant pour l'étude du mouvement des planètes et des satellites.

1. Préliminaires : vecteurs en 3D

1.1. Produit vectoriel

- Définir le produit vectoriel : direction, sens et norme.
- Produit vectoriel de deux vecteurs d'une base orthonormée directe (BOND)
- Calcul des coordonnées du produit vectoriel dans une BOND
- Le produit vectoriel est-il distributif, commutatif, associatif ?
- Effet sur le produit vectoriel de la multiplication des vecteurs par un scalaire
- Dérivée par rapport au temps d'un produit vectoriel de deux vecteurs dépendants du temps.

- Expression de l'aire d'un triangle en fonction de la norme du produit vectoriel de deux côtés.

1.2. Angle *orienté* entre deux vecteurs dans l'espace 3D

On remarque que :
- l'angle entre deux vecteurs ne peut être défini que *si les deux vecteurs se situent dans un même plan*
- l'orientation de l'angle dans le plan diffère selon que l'on regarde par-dessus ou par-dessous le plan

Pour connaître le signe de l'angle orienté formé par deux vecteurs dans l'espace 3D, il faut d'abord ***choisir le sens du vecteur normal*** au plan constitué par les deux vecteurs : alors le sens positif des angles est conventionnellement défini par ***la règle du tire-bouchon***.

Quand le vecteur normal au plan *pointe vers notre œil*, le sens positif des angles est le *sens direct*

1.3. Mouvement circulaire : définition du *vecteur vitesse angulaire*

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, on peut définir *le vecteur vitesse angulaire* $\vec{\omega}$, et exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction de son vecteur vitesse angulaire.

- Définir un repère adapté, sur un schéma dans le plan de la trajectoire (centre C, rayon R)
- Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse dans le repère choisi
- Rappeler ce qu'on appelle « la vitesse angulaire du point M ». Quelle est son unité ? Quelle information nous donne son signe ?

La notion de « vecteur vitesse angulaire » complète celle de « vitesse angulaire » : o sa direction est orthogonale au plan de la trajectoire o connaissant le sens de $\vec{\omega}$, la règle du tire-bouchon donne le sens de rotation de M

- Exprimer $\vec{\omega}$ dans le repère choisi, et le représenter sur le schéma

Pour un mouvement *circulaire* de centre C : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CM}$

2. Objectif du cours : un nouveau théorème en mécanique du point

2.1. Outils disponibles à ce stade

- Rappeler la définition précise du vecteur vitesse et de la quantité de mouvement.
- Qu'est-ce qu'une grandeur cinétique ?

Les deux outils dont on dispose à ce stade du cours de mécanique du point matériel sont la RFD, et le TEC sous sa forme instantanée (le TEC sur une durée finie, ainsi que les deux versions du TEM, s'en déduisent).

Ces deux expressions sont formellement analogues. La variation instantanée d'une grandeur cinétique ***du point M*** est déterminée par une quantité ***dépendante des forces*** :

$$\frac{d}{dt}(grandeur\ cinétique) = quantité\ dépendant\ des\ forces$$

2.2. Démonstration du nouveau théorème

Par analogie avec la méthode utilisée pour démontrer le TEC, on va établir un nouveau théorème à partir de la RFD. L'objectif est de trouver une nouvelle expression, formellement analogue à la RFD et au TEC.
Après avoir établi le nouveau théorème, on retiendra qu'il n'y a pas une infinité de solutions au problème que l'on s'est posé, i.e. trouver une expression formellement analogue à la RFD. Les deux théorèmes que l'on a établis à partir de la RFD sont les seuls répondants à la contrainte que l'on s'est imposée.

Il s'agit à présent d'interpréter physiquement les deux termes qui apparaissent dans le nouveau théorème :

- *le moment d'une force par rapport à un point A*
- *le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point A*

L'idée clef est la suivante : ces deux grandeurs sont particulièrement adaptées à l'étude ***de la rotation du point matériel par rapport à un point***. Il faut ici comprendre le terme « rotation » de manière plus générale que ne le suggère l'intuition. Par exemple, un point matériel en translation rectiligne uniforme peut être considéré comme étant en rotation autour d'un point situé en-dehors de sa trajectoire.

3. Moment d'une force par rapport à un point

3.1. Définition et interprétation physique

On considère un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$. Soit un point A quelconque de l'espace.
On définit ***le moment*** $\boldsymbol{\overrightarrow{M_A}}$ ***de la force*** $\boldsymbol{\vec{F}}$ ***par rapport au point A*** par l'expression :

$$\overrightarrow{M_A} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

Remarques :

- Si le point matériel est soumis à plusieurs forces, le produit vectoriel étant un opérateur linéaire, on remarque que le moment de la somme des forces est égal à la somme des moments de chacune des forces.
- Le moment d'une force par rapport à un point *dépend du point A considéré*.

Interprétation physique :
Après l'étude de quelques cas particuliers, on retiendra que :

Le moment d'une force par rapport à un point A représente
la tendance de cette force à faire tourner le point matériel autour du point A selon une direction et un sens.

- *La direction du moment donne l'axe autour duquel la force tend à faire tourner le point matériel.*
- *Le sens du moment donne le sens de rotation autour de cet axe (règle du tire-bouchon).*
- *La norme du moment mesure l'intensité avec laquelle la force tend à faire tourner le point matériel.*

3.2. Notion de bras de levier

En se plaçant dans le plan formé par le point A et le vecteur force, on considère *la droite support de la force*. La distance du point A à cette droite représente le *bras de levier* avec lequel la force s'applique. Il est important d'apprendre à visualiser ce bras de levier sur un schéma.

Le **bras de levier** (noté d) permet de calculer facilement **la norme du moment** :

$$\|\overrightarrow{M_A}\| = \|\vec{F}\| \times d$$

Pour déterminer *complètement* le moment de la force, on utilise la règle des trois doigts (de la main droite) pour déterminer la direction et le sens du (vecteur !) moment.

3.3. Calcul du moment des forces dans le cas du pendule simple

On peut calculer le moment d'une force par deux méthodes :

- Une méthode purement analytique : en exprimant les coordonnées des vecteurs dans la base du repère, puis calculer les coordonnées des moments de chacune des forces.

- Une méthode géométrique : en repérant le bras de levier, on en déduit la norme du moment. Par la règle des trois doigts (de la main droite), on détermine alors la direction et le sens du moment.

Dans le cas du pendule simple, il est clair que le point matériel effectue un mouvement de rotation (circulaire ici) autour du point O d'attache du fil. On cherche à calculer le moment en O de chacune des forces appliquées au point matériel M.

- Quel repère va-t-on définir pour étudier le pendule simple ?
- Appliquer les deux méthodes pour déterminer le moment en O de chacune des forces.

4. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

4.1. Définition et interprétation physique du moment cinétique par rapport à un point

On considère le mouvement d'un point matériel *M* dans un référentiel donné. Soit un point *A* quelconque.
On définit ***le moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ du point matériel par rapport au point A*** par l'expression :

$$\overrightarrow{L_A} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}$$

Remarque :

- La vitesse du point matériel dépend du référentiel d'étude. Donc le moment cinétique du point matériel *est une grandeur relative : elle dépend du référentiel d'étude*.
- Le moment cinétique du point matériel par rapport à un point *dépend du point A considéré*.

Interprétation physique :
Après l'étude de quelques cas particuliers, on retiendra que :

Le moment cinétique du point matériel M par rapport à un point A représente
la « quantité de rotation » du point M autour de A selon une direction et un sens*, à l'instant t.*

- *La direction du moment cinétique donne l'axe autour duquel le point matériel tourne à l'instant t.*
- *Le sens du moment cinétique donne le sens de rotation du point matériel autour de cet axe.*
- *La norme du moment cinétique représente « la quantité de rotation » du point matériel autour de cet axe*

4.2. Notion de bras de levier

Par analogie avec le moment d'une force, définir la notion de bras de levier dans le cas du moment cinétique. Il est important de pouvoir identifier ce bras de levier sur un schéma, puisqu'il permet de déterminer l'expression du moment cinétique par une méthode géométrique.

Le **bras de levier** *(noté d) permet de calculer facilement* **la norme du moment** :

$$\left\|\overrightarrow{L_A}\right\| = \|m\vec{v}\| \times d$$

Pour déterminer *complètement* le moment cinétique, on utilise la règle des trois doigts (de la main droite) pour déterminer la direction et le sens du (vecteur !) moment.

4.3. Enoncé du TMC par rapport à un point fixe

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Dans un référentiel ***galiléen****,* A *étant un point* **fixe** *dans ce référentiel, le TMC s'écrit :*

$$\frac{d\overrightarrow{L_A}}{dt} = \overrightarrow{M_A}$$

Le second terme est *le moment total des forces*, i.e. la somme des moments de chaque force.

Le TMC est une relation vectorielle, qui donne trois équations scalaires par projection sur les vecteurs de base du repère. Elle peut généralement se substituer à la RFD pour établir les équations différentielles du mouvement.

4.4. Méthode de résolution d'un problème avec le TMC - Intérêt du TMC

La méthode de résolution d'un problème de mécanique avec le TMC est similaire à celle déjà mentionnée pour la RFD et le TEC :

- Définir le système étudié (point matériel M)
- Définir le référentiel *galiléen* depuis lequel on étudie le mouvement du système
- Choisir un repère et l'orienter convenablement. Faire un schéma en représentant le point M dans une position quelconque (si possible x, y, z, θ dessinés positifs pour éviter les erreurs de signe par la suite)

- Faire un bilan des forces appliquées au point matériel durant le mouvement
- Appliquer une loi de la dynamique pour relier les causes à leurs effets ; le TMC par exemple :
  - Identifier un point *A* fixe dans le référentiel
  - Calculer le $\overrightarrow{M_A}$ de chaque force appliquée à *M* (grâce à la définition)
  - Exprimer $\overrightarrow{L_A}$ du point matériel en fonction des coordonnées (grâce à la définition)
  - Appliquer le TMC pour obtenir les équations différentielles du mouvement

Comme dans le cas du TEC, tout l'intérêt du TMC est de permettre une résolution simplifiée du problème dans certains cas. En choisissant convenablement le point fixe *A*, *le moment d'une ou plusieurs forces peut être nul*. On peut ainsi *éliminer des équations des forces inconnues* (tension d'un fil, réaction normale d'un support). En outre, l'utilisation du TMC dans le cas de *mouvements à force centrale* est très puissante, comme on le verra à la fin du chapitre.

Remarque : La notion de moment cinétique est très importante en physique. Elle ne se réduit pas à la définition qu'on en a donnée dans ce chapitre. Par exemple, en physique quantique, un électron immobile dans le référentiel d'étude possède néanmoins un moment cinétique, dit « intrinsèque » : c'est le spin.
En physique moderne, le moment cinétique – avec la quantité de mouvement et l'énergie – est une grandeur qui se conserve pour un point matériel isolé de toute action extérieure. Cette loi découle de l'isotropie de l'espace (principe de symétrie).

4.5. Etablissement de l'ED du pendule simple par application du TMC

Pour le calcul du moment cinétique, on utilisera successivement les deux méthodes.

- Une méthode purement analytique : exprimer les coordonnées des vecteurs dans la base du repère, puis calculer les coordonnées du moment du moment cinétique.

- Une méthode géométrique : repérer le bras de levier, et en déduire la norme du moment cinétique. Par la règle des trois doigts (de la main droite), déterminer la direction et le sens du moment cinétique. Comparer les expressions obtenues par les deux méthodes.

➢ Etablir l'EDiff du mouvement du pendule simple en appliquant le TMC. On précisera bien les conditions qui permettent son application

5. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Dans certains cas (mouvement plan, rotation autour d'un axe), il est souvent plus pratique de considérer que le point matériel est en rotation autour d'un axe, plutôt qu'autour d'un point. Bien qu'avec ce point de vue on ne puisse pas toujours établir *toutes* les équations horaires du mouvement, cela permet parfois de dégager rapidement des propriétés intéressantes du mouvement étudié.

Dans cette section, on va définir :

- le moment d'une force *par rapport à un axe orienté*,
- le moment cinétique du point matériel *par rapport à un axe orienté*
- puis énoncer le TMC *par rapport à un axe orienté et fixe*

Les définitions que l'on va énoncer nécessite au préalable d'avoir identifié un axe, et de l'avoir orienté.
On caractérise la direction et le sens de l'axe Δ par la donnée d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$.

5.1. Définition du moment d'une force par rapport à un axe *orienté*

Soit un point A *quelconque de l'axe* Δ. *Le moment d'une force par rapport à l'axe est défini par :*

$$M_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Remarques :

- Le moment d'une force par rapport à un axe est *un scalaire algébrique*
- Il est aussi appelé « moment scalaire d'une force »
- Il est défini à partir du moment par rapport à un point de l'axe. C'est simplement *la projection du moment vectoriel selon le vecteur unitaire de l'axe orienté*

➢ Vérifier que cette définition ne dépend pas du point *A* de l'axe

Interprétation physique :

➢ Interpréter le signe et la valeur absolue du moment scalaire d'une force.
➢ Le moment d'une force est nul lorsqu'elle ne tend pas à faire tourner le point matériel autour de l'axe :
  - *lorsque la force est parallèle à l'axe*
  - *lorsque la droite-support du vecteur force coupe l'axe*

5.2. Définition du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe *orienté*

Soit un point A *de l'axe* Δ. *Le moment cinétique du point matériel* M *par rapport à l'axe est défini par :*

$$L_\Delta \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{L_A} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

Remarques :

- Le moment cinétique du point matériel par rapport à un axe est *un scalaire algébrique*
- Il est aussi appelé « moment cinétique scalaire »
- Il est défini à partir du moment cinétique par rapport à un point de l'axe. C'est simplement *la projection du moment cinétique vectoriel selon le vecteur unitaire de l'axe orienté*

➢ Vérifier que cette définition ne dépend pas du point A de l'axe

Interprétation physique :

➢ Interpréter le signe et la valeur absolue du moment cinétique scalaire.

5.3. Notion de bras de levier

La notion de bras de levier reste valable et utile pour déterminer géométriquement le moment cinétique et le moment d'une force par rapport à un axe. Pour repérer le bras de levier sur un schéma, dans le cas du moment d'une force (valable aussi pour le moment cinétique), il ne faut considérer que la composante de la force incluse dans le plan orthogonal à l'axe.

5.4. Enonce du TMC par rapport à un axe fixe

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe

Dans un référentiel ***galiléen****, l'axe* Δ *étant un axe orienté* ***fixe*** *dans ce référentiel, le TMC s'écrit :*

$$\frac{d L_\Delta}{dt} = M_\Delta$$

Le second terme est le *moment total des forces*, i.e. la somme des moments de chaque force.

Le TMC par rapport à un axe fixe est une relation *scalaire*, qui ne donne qu'une seule équation différentielle. Il peut permettre de déterminer complètement le mouvement du point matériel dans le cas d'un problème à un degré de liberté. Dans le cas général, il ne permet pas de déterminer *toutes* les équations horaires du mouvement.

5.5. Exemple de conservation du moment cinétique : patinage artistique

On modélise de manière simplifiée un patineur artistique en rotation sur lui-même :

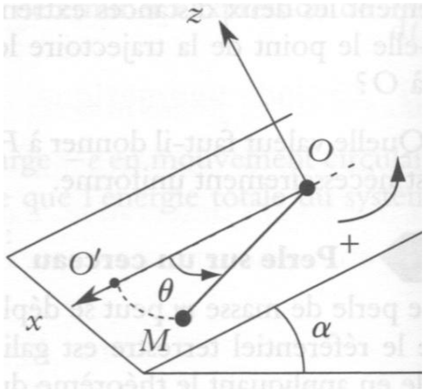
- le tronc du corps est modélisé par un axe vertical fixe par rapport au sol
- un de ses bras, modélisé par une tige, est initialement disposé perpendiculairement au reste du corps
- sa main est modélisée par un point matériel M situé au bout de la tige

On étudie le mouvement du point matériel M. Initialement, le patineur tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire Ω_0. Le patineur ramène alors son bras vers le haut, tout en le gardant tendu, de manière à former avec son bras un angle α avec la verticale.

➢ Démontrer que le moment cinétique par rapport à l'axe se conserve au cours du mouvement.
➢ Que peut-on dire de la vitesse angulaire de rotation lorsque l'angle α tend vers zéro ?

5.6. Exemple de l'intérêt de cette version du TMC

Un pendule simple est constitué d'un point M de masse m attaché à un fil de masse négligeable, de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. L'ensemble peut se déplacer sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal.



- En repérant la composante du poids incluse dans le plan (et donc orthogonale à l'axe de rotation), calculer son moment par rapport à l'axe de rotation.

- En appliquant le TMC par rapport à cet axe, déterminer l'ED du mouvement et la période des petites oscillations.

- Qu'aurait-on dû calculer en plus en utilisant le TMC par rapport à O. Conclure quant à l'intérêt du TMC par rapport à un axe.

6. Mouvements à force centrale

L'application du TMC aux mouvements à force centrale est particulièrement intéressante. Dans cette situation particulière, le moment cinétique du point matériel se conserve. Les conséquences qui en découlent sont riches : on établit que *le mouvement est plan et vérifie la loi des aires*. On rencontrera cette situation dans l'étude du mouvement des planètes et des satellites (prochain chapitre).

6.1. Définition d'un champ de force centrale

Définition d'un champ de force centrale

Un point matériel *M* est soumis à *un champ de force centrale, de centre O fixe dans un référentiel galiléen,* si *à tout instant le vecteur force $\vec{F}$ est colinéaire au rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$.*

Exemples : Force gravitationnelle.

6.2. Conservation du moment cinétique – Planéité du mouvement

On considère un point matériel *M* soumis uniquement à un champ de force centrale, de centre *O*. Ce centre est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

- Démontrer que le moment cinétique par rapport au point *O* se conserve au cours du temps.
- En déduire que la trajectoire du point *M* est plane. En déduire aussi que le mouvement de rotation autour de O se fait toujours dans le même sens.
- Que peut-on dire si le moment cinétique est nul ?

Le mouvement d'un point matériel ***soumis à un CFC de centre O*** *est* **contenu dans le plan orthogonal à $\overrightarrow{L_O}$.**

6.3. Conservation du moment cinétique – Loi des aires

- Faire un schéma en se plaçant dans le plan de la trajectoire. Dessiner une portion quelconque de la trajectoire du point *M*. Repérer la position initiale (instant *0*) et une position quelconque sur cette trajectoire (instant *t*).
- Dessiner sur le schéma « l'aire $A(t)$ balayée par le rayon vecteur » entre les instants *0* et *t*.

On considère à présent deux instants successifs infiniment proches : t et $(t + dt)$.

- Sur un nouveau schéma, représenter le déplacement élémentaire de M pendant la durée élémentaire dt. Représenter aussi l'aire élémentaire dA balayée entre ces deux instants.
- Calculer cette aire élémentaire, et démontrer que $\frac{dA}{dt}$ est une constante.

On vient d'établir la loi des aires, toujours valable pour un mouvement à force centrale :

Un point matériel soumis à un CFC de centre O vérifie la loi des aires : ***pendant des durées Δt égales, le rayon-vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales.***

Remarques :

- La variation instantanée de l'aire balayée $\frac{dA}{dt}$ est appelée *vitesse aréolaire*.
- On reconnaît ici la $3^{\text{ème}}$ loi de Kepler concernant le mouvement des planètes.

Notions clefs

Savoirs :

- Définition et *interprétation physique* du moment d'une force par rapport à un point / à un axe orienté
- Définition et *interprétation physique* du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point / axe
- Utilité de la notion de bras de levier pour le calcul de la norme des moments (puis 3 doigts pour vecteur)
- Enoncés du TMC par rapport à un point fixe / axe fixe + avantages de l'utilisation du TMC
- Définition et propriétés des mouvements à force centrale :
    - Conservation du moment cinétique par rapport au centre de force
    - Loi des aires

Savoirs faire :

- Manipuler le produit vectoriel : calcul des coordonnées, règle des trois doigts de la main droite
- Déterminer le signe d'un angle orienté dans l'espace 3D (règle du tire-bouchon)
- Calculer les moments (d'une force, et cinétique), notamment :
    - Repérer le bras de levier, et l'utiliser pour un calcul rapide des moments
- Appliquer le TMC pour établir les équations différentielles du mouvement