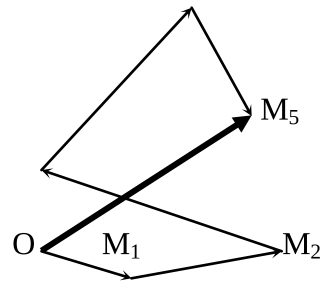
ETUDE DU MOUVEMENT BROWNIEN ; MESURE DU NOMBRE D'AVOGADRO

Le botaniste Robert Brown observa en 1827 le mouvement erratique de très petites particules dans le pollen d'une plante. Ce mouvement, du à l'agitation thermique, ne fut interprété qu'au début du XXème siècle. Nous allons étudier quantitativement l'effet du mouvement brownien (agitation thermique) sur des microsphères de Latex (de diamètre 1,1 micron) en suspension dans l'eau, en déduire leur coefficient de diffusion ainsi que le nombre d'Avogadro à l'aide de la relation d'Einstein.

1. Préparation :

1.1 Diffusion et marche au hasard :



On a introduit dans l'eau liquide une microsphère M qui est 'heurtée' par les molécules d'eau. On enregistre sa position toutes les τ secondes, cet intervalle de temps étant grand devant le temps que met la vitesse à se stabiliser après un choc.

Elle semble se déplacer par sauts successifs, chaque saut étant indépendant du précédent, en longueur et en direction. Toutes les directions sont supposées équiprobables.

Elle est initialement à l'origine O de l'espace, et occupe successivement les positions M_1, M_2,…M_i, etc.
On note X_i la composante sur Ox du vecteur déplacement au cours du saut 'i', soit ,
en notant $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ ce déplacement, $X_i = \overrightarrow{M_iM_{i+1}} \cdot \vec{u}_x$.
On note X la composante sur Ox du déplacement total après N sauts, depuis l'origine :

$$X = \overrightarrow{OM_N}.\vec{u}_x .$$

Le signe <U> représentant la moyenne de la grandeur 'U' prise sur un grand nombre de particules, on montre alors que :

$$\boxed{< X^2 >= \frac{t}{\tau}.\frac{1}{3}\tau^2.u^2 = \left(\frac{1}{3}.u^2.\tau\right).t} \quad : \ <X^2> \text{ est proportionnel à t.}$$

Pour un déplacement dans le plan (ou un mouvement dans l'espace observé en projection sur un plan), la moyenne du carré de la distance parcourue en 't' secondes est $< L^2 >=< X^2 + Y^2 >= 2.\left(\frac{1}{3}u^2\tau\right).t$: elle est aussi proportionnelle à t, de même celle parcourue dans l'espace.

2.2. Coefficient de diffusion et relation d'Einstein :

On montre (cf diffusion) que l'on peut relier le résultat précédent au phénomène de diffusion des particules, faisant intervenir un coefficient de diffusion D ; on a alors :

$$\boxed{< L^2 >= 4D.t}.$$

L'étude fournira donc une mesure du coefficient de diffusion des particules en suspension dans l'eau.
Dans un des trois articles célèbres qu'il a publié en 1905, Einstein établit une relation entre le coefficient de diffusion D et l'agitation thermique : $D = \frac{k_B T}{6\pi.\eta.a}$ où k_B est la constante de Boltzmann, T la température, η la viscosité dynamique du fluide dans lequel se produit la diffusion, a le rayon des particules diffusantes.
Cette équation a le grand mérite de relier un paramètre macroscopique (coef. de diffusion) à l'énergie d'agitation thermique (k_BT), paramètre microscopique.

2. Observation du mouvement brownien :

On a filmé à l'aide d'une caméra (30images/s) fixée sur un microscope le mouvement de microsphères de Latex de diamètre 1,1microns dans l'eau, à T = 298 K.
Le film se trouve sur votre répertoire de classe et se nomme Brownien.avi. Observez-le.
A l'aide d'un logiciel de capture, on a suivi <u>une microsphère particulière</u> dont on a mesuré les positions successives au cours du temps.

Le tableau Excel fourni (fichier TD_Brownien) donne les positions de cette microsphère toutes les 0,1 s pendant 10 s (soit 100 points de mesure).
Il s'agit à présent traiter ces données.
On va utiliser ici l'<u>hypothèse ergodique</u> : elle consiste à admettre que la moyenne $<L^2>$ prise sur un grand nombre de particules est la même que celle qui serait obtenue en prenant la moyenne des valeurs de L^2 dans son évolution temporelle, pour une seule particule.

3. Traitement des données :

3.1. Visualisation des positions successives :

Ouvrir le tableur Excel et charger le fichier 'TD_Brown' disponible sur votre répertoire de classe.
La première feuille contient trois colonnes : le temps t et les abscisses et ordonnées de la microsphère aux instants $t_i = n * 0{,}1s$ avec $0 < n < 100$.
Dessiner (nuage de points) les positions successives enregistrées.
Remarque : le tracé obtenu n'est pas la trajectoire de la microsphère : elle est de nature chaotique. Chaque 'segment' est en fait constitué d'une multitude de segments plus petits… Cette représentation permet simplement de visualiser les positions successives enregistreés.

3.2. Calcul des distances parcourues :

Le calcul du coefficient de diffusion exige la connaissance de la valeur moyenne du carré de la distance parcourue en fonction du temps.
On veut calculer le carré de la distance parcourue entre la première position (t=0) et la deuxième (colonne M_nM_{n+1}) : entrer dans la case jaune de la colonne correspondante la formule adéquate, la valider par 'entrée', puis copier et coller dans toute la colonne.
Effectuer de même le calcul du carré de la distance parcourue entre la première et la troisième position (dans case jaune de la colonne M_nM_{n+2}) jusqu'à la colonne M_nM_{n+17}, afin d'obtenir 17 points de mesure.
Calculer pour chaque instant la moyenne des carrés des distances parcourues (ligne 104).

3.3. Mesure du coefficient de diffusion et du nombre d'Avogadro :

Tracer sur une nouvelle feuille la courbe représentant la moyenne des carrés des distances parcourues en fonction du temps, pour les 17 valeurs calculées, ainsi que la droite obtenue par régression linéaire, avec son équation et son coefficient de corrélation. Ce dernier doit être le plus proche de 1 possible.

A partir des coefficients de la courbe de régression, calculer les valeurs du coefficient de diffusion D et du nombre d'Avogadro N_A, en utilisant les formules fournies dans le texte.

4. Caractère statistique du phénomène :

Pour nous rendre compte du caractère statistique du phénomène de diffusion (et du mouvement brownien) , Nous allons refaire le même travail sur des positions résultant d'une « marche au hasard » générée par ordinateur.
On peut se contenter d'une analyse à une dimension, ie selon l'axe Ox.

Sur une nouvelle feuille, générer un tableau de 100 abscisses, résultant d'une marche au hasard avec un pas de 1. On utilise pour cela la fonction ALEA d'Excel.

Réaliser sur cette série de positions le même traitement, et tracer la courbe représentant la moyenne des carrés des distances parcourues en fonction du temps, ainsi que la droite obtenue par régression linéaire, avec son équation et son coefficient de corrélation.
Que constatez-vous ?

Valeurs numériques utiles :

Pour la microsphère :
masse volumique=$1,05.10^{3}$Kg/m^{3} diamètre=$1,1.10^{-6}$m
coefficient de viscosité dynamique de l'eau : $\eta=1.10^{-3}$Pl à 20°C, et $0,79.10^{-3}$Pl à 30°C