

Exercices – Conducteurs ohmiques – Equations de Maxwell

Exercice 1 : Conductivité complexe – Domaine de validité de la loi d'ohm (Centrale PSI 2006)

Découvrir une autre façon de mener le calcul fait en cours pour établir la loi d'ohm locale

Se confronter à un énoncé de concours

II.A - Modèle du conducteur métallique dans le domaine des hyperfréquences ou inférieur

On considère un milieu conducteur homogène de dimension supposée infinie. On note γ_0 sa conductivité électrique en régime statique. On suppose qu'il y a n porteurs de charge libres par unité de volume, n est supposé indépendant du temps. Chaque porteur de charge libre est de masse m et possède une charge électrique q .

II.A.1) On soumet ce conducteur à un champ électrique permanent et uniforme \vec{E}_0 . On admet, suivant le modèle de Drude, que l'interaction des charges fixes sur un porteur de charge libre est assimilable à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$.

a) Écrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la vitesse \vec{v} d'un porteur de charge libre.

b) Montrer que cette vitesse tend vers une vitesse limite \vec{v}_{lim} que l'on exprimera et définir un temps τ_1 de relaxation du matériau à partir duquel la loi d'Ohm est valable. En déduire la relation entre γ_0 , q , n et h .

c) *Application numérique*

On suppose que le conducteur possède un électron libre par atome.

La matériau considéré est de l'acier (alliage de fer avec du carbone en faible proportion). Comme ordre de grandeur, on prendra :

μ : masse volumique $\approx 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;

M : masse molaire $\approx 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma_0 \approx 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

Préciser les ordres de grandeurs de n , h et τ_1 .

II.A.2) On soumet maintenant ce conducteur à un champ électrique sinusoïdal $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, auquel on associe le champ complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$.

a) Montrer que le modèle de Drude permet de définir une conductivité complexe γ que l'on exprimera en fonction de γ_0 , τ_1 et ω .

b) Justifier que pour des fréquences ne dépassant pas 100 GHz, on peut assimiler la conductivité électrique du matériau à sa conductivité statique γ_0 , c'est-à-dire que la loi d'Ohm reste encore valable à de telles fréquences.

II.A.3) Lorsque le matériau est soumis à un champ électrique $\vec{E}(t)$ variable, il est le siège de courant de conduction \vec{j} et de courant de déplacement \vec{j}_D . Justifier que pour des fréquences au plus de l'ordre de 100 GHz, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

Exercice 2 : Puissance rayonnée vers l'intérieur d'un fil, et dissipée par effet Joule

Calculer une puissance rayonnée dans un cas concret

Vérifier que la puissance reçue par les porteurs du conducteur est effectivement dissipée par effet Joule

Un fil cylindrique d'axe Oz, de rayon a et de grande longueur est parcouru par une densité de courant uniforme \vec{j} , associée à un courant I . Le matériau est un conducteur ohmique de conductivité γ .

1. Exprimer le champ électrique \vec{E} en fonction de γ , a et I .

2. Sur la surface latérale, on admet que le champ magnétique créé par le courant s'écrit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$. Exprimer le vecteur de Poynting au niveau de la surface latérale

3. Calculer la puissance électromagnétique reçue sur cette surface latérale, sur une longueur L de fil. Comparer à la puissance dissipée dans le fil par effet Joule. Interpréter physiquement le résultat.

On notera que l'énergie électromagnétique pénètre radialement dans le conducteur, contrairement à ce que l'on imagine lorsque l'on assimile (à tort) transport de charge et transport d'énergie.

Exercice 3 : Electrons dans un synchrotron

Faire le lien entre une description corpusculaire et une description continue

Dans un synchrotron, un paquet de $N = 10^{11}$ électrons se déplace sur une orbite presque circulaire de longueur $L = 240$ m. Leur vitesse est à peu près égale à celle de la lumière. Que vaut le courant ?

Réponse : $i = 20$ mA.

Exercice 4 : Electro-neutralité d'un métal en régime variable

Etablir qu'un métal reste électriquement neutre en-dessous d'un certain seuil en fréquence d'excitation

On considère un conducteur ohmique de conductivité γ .

1. En utilisant les équations de Maxwell, montrer que la densité volumique de charges vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$$

2. Quelle est la solution de cette équation ? Quel est l'ordre de grandeur du temps de relaxation τ d'un bon conducteur ? En déduire qu'aux fréquences usuelles on peut considérer que le conducteur reste neutre.

Annexe d'analyse vectorielle : $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A})) = 0$