

Mécanique – TD4 : Oscillations libres (harmoniques ou amorties)

Exercice 1 : Unités

Cet exo ne sera pas corrigé en séance de TD. Je répondrai évidemment aux questions si vous en avez.

Déterminer les unités des expressions suivantes, et se souvenir à quoi ces formules correspondent dans le cours :

- $\sqrt{\frac{k}{m}}$ k constante de raideur de ressort, m masse
- $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ℓ est une longueur, g le champ de pesanteur
- $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
- $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ L est une inductance, C une capacité

Exercice 2 : Détermination d'un coefficient de viscosité (un dispositif similaire sera étudié en TP)

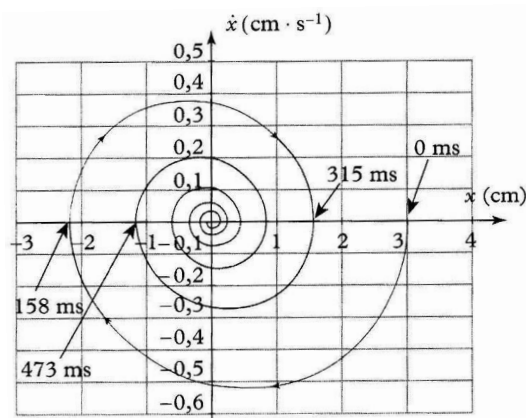
Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide l_0 . Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η , la sphère est soumise à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide.

1. Ecrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T .
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0 . Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m , r , T et T_0 .

Exercice 3 : Portrait de phase

On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse $m = 500 \text{ g}$ soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur k) et à une force de frottement fluide (de coefficient h). x est la coordonnée cartésienne repérant le mouvement.

1. Déterminer graphiquement la nature du régime de l'oscillateur.
2. Déterminer par lecture graphique :
 - la valeur initiale de la position
 - en quel point (à représenter sur un schéma du montage) a été fixé l'origine du repère cartésien pour repérer le mouvement ?
 - la pseudo-période
 - le décrément logarithmique



Pour la question suivante, on ne redémontrera pas les formules vues en cours (qui ne sont pas à connaître par cœur non plus, donc ayez vos notes de cours devant les yeux : chapitre 3 d'élec et chap. 5 de méca).

3. Comprendre les étapes de calculs (sans les faire) nécessaires pour déduire les valeurs des paramètres suivants :
 - le facteur de qualité (utiliser les formules entre δ et α , puis entre α et Q du chapitre 3 d'élec)
 - la pulsation propre (utiliser formule de T en fonction de T_0 et Q)
 - la raideur du ressort et le coefficient de frottement fluide

Exercice 4 : Portrait de phase d'un oscillateur non harmonique

Soit un oscillateur dont le mouvement est régi par l'équation différentielle suivante :

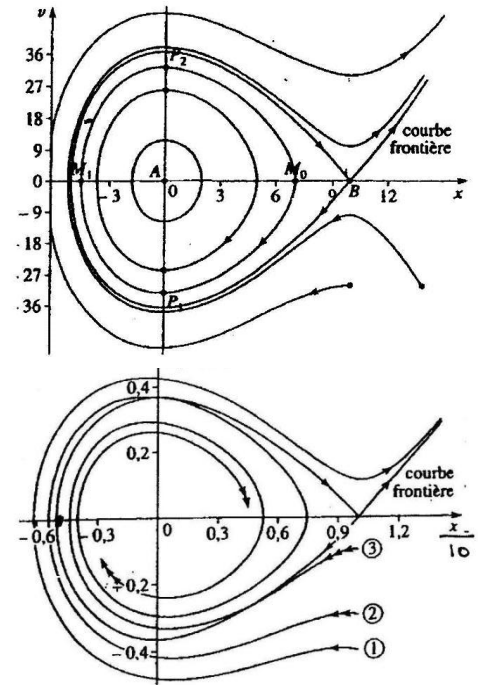
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x(1 - px)$$

On représente son portrait de phase pour $p = 0.1$.

1. Que représentent les points A et B ?
2. Déterminer à partir de l'équation différentielle la fonction énergie potentielle $E_p(x)$. Tracer son allure, et identifier les points A et B sur le diagramme d'énergie potentielle.
3. Expliquer alors le premier portrait de phase (ci-contre).
4. L'oscillateur est maintenant régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x(1 - px) - \omega_0 f \dot{x}$$

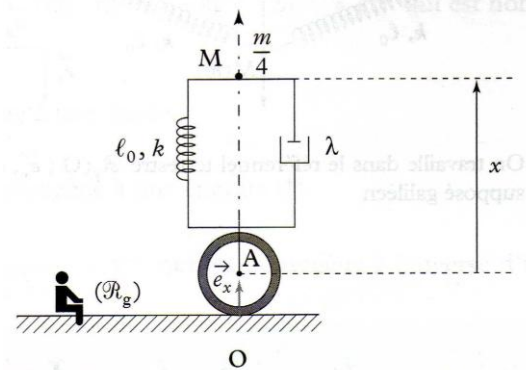
Que représente le terme supplémentaire introduit ? Discuter alors de l'allure du nouveau portrait de phase, obtenu pour $p = 0.1$ et $f = 0.1$.



Exercice 5 : Amortisseur de voiture

On modélise l'amortisseur d'une voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement λ . Une masse $m/4$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe e_x lié au référentiel terrestre, supposé galiléen. La masse $m/4$ représente la masse du véhicule de masse m pesant sur le système d'amortisseur.

1. Lors du changement d'une roue on soulève d'une hauteur $h = 25$ cm la carcasse du véhicule, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur AM (longueur du ressort) vaut alors 40 cm. Déterminer les caractéristiques du ressort.
2. Déterminer et calculer λ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse $m/4$ en mouvement vertical)
3. On enfonce la masse $m/4$ d'une hauteur $d = 5$ cm et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude x de la masse $m/4$.



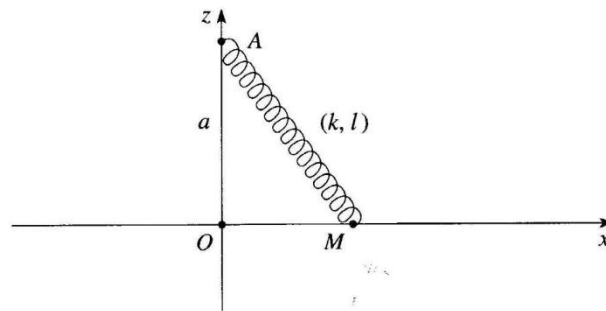
Exercice 6 : Oscillateur amorti

On considère les petites oscillations autour de l'équilibre d'une masse $m = 100$ g accrochée à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 20$ N.m⁻¹. La masse n'est soumise à aucun frottement solide de la part du support horizontal sur lequel elle évolue. Par contre, la masse est soumise à une force de frottement fluide, de coefficient de frottement $h = 2$ kg.s⁻¹.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par x , coordonnée qui repère le mouvement par rapport à la position d'équilibre.
2. Montrer que le régime est pseudopériodique. Etablir alors l'expression de la pseudopériode des oscillations.
3. Evaluer la durée caractéristique du régime

Exercice 7 : Autre pendule élastique

Déterminer la période T_0 des petites oscillations d'un point matériel M de masse m , assujéti à se déplacer sans frottement sur une droite horizontale, sous l'action d'un ressort (k, l_0) dont l'autre extrémité est fixe en A de cote $a > l_0$. On notera que « petites oscillations » signifie que $x \ll a$.



On utilisera le TEM afin d'établir l'équation différentielle de l'oscillateur. On utilisera aussi le développement limité suivant, valable pour x proche de 0 : $(1+x)^m = 1+mx$, où m est un réel.

Exercice 8 : Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 10$; la masse $m = 100 \text{ g}$ de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de $x_0 = 10 \text{ cm}$ sans vitesse initiale.

Calculer :

- la pseudo-période
- le décrétement logarithmique
- l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudopériodes. On démontrera auparavant que

$$n\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right), n \text{ étant un entier.}$$

- l'énergie mécanique initiale
- l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudopériodes. On remarquera que l'on calcule l'énergie mécanique aux maxima du mouvement (où l'énergie cinétique est nulle). A ces instants-là, l'énergie mécanique dépend uniquement de l'amplitude. On utilisera donc le décrétement logarithmique.