

Chap.2 – Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires

1. ARQS

- 1.1. Définition des régimes quasi-stationnaires
- 1.2. Ce qui est négligé dans l'ARQS
- 1.3. Conséquence 1 : validité des lois de la magnétostatique
- 1.4. Conséquence 2 : validité de la loi des noeuds

2. Application : Effet de peau dans un conducteur ohmique

- 2.1. Loi d'Ohm locale (rappel)
- 2.2. Expression de la résistance d'un tronçon de conducteur (rappel)
- 2.3. Equation vérifiée par le courant
- 2.4. Effet de peau : le courant ne circule que sur les bords du conducteur

1. ARQS

1.1. Définition des régimes quasi-stationnaires

Comme en première année (cours circuits électriques), les *régimes lentement variables*, appelés aussi *régimes quasi-stationnaires* ou *quasi-permanents*, caractérisent les situations où la propagation de l'onde électromagnétique peut être considérée comme infinie.

On néglige la durée de propagation d'une modification d'un bout à l'autre du dispositif (circuit élec par exemple) devant la durée caractéristique du régime variable (période si étude harmonique).

Cela revient au même de dire que l'on néglige la dimension du dispositif devant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique (régime harmonique).

1.2. Ce qui est négligé dans l'ARQS

- Par analyse dimensionnelle (raisonnement par ordre de grandeur, comme en mécanique des fluides), montrer que le dernier terme de l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable devant le rotationnel de B dans le cadre de l'ARQS.

ARQS

L'Approximation des RQS revient à négliger le courant de déplacement dans l'équation de M-A :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

1.3. Conséquence 1 : validité des lois de la magnétostatique

1^{re} conséquence de l'ARQS

*Les lois de la magnétostatique se généralisent aux cas des régimes lentement variables.
Le théorème d'Ampère et la loi de Biot et Savart sont encore valides.*

1.4. Conséquence 2 : validité de la loi des noeuds

- Ceci a été affirmé en première année. Le démontrer dans cette partie.

2^e conséquence de l'AROS

La loi des nœuds est valide dans le cadre de l'AROS

2. Application : Effet de peau dans un conducteur ohmique

2.1. Loi d'Ohm locale (rappel)

Dans un métal, chaque atome libère environ un électron, libre alors de se déplacer à l'intérieur du métal. On rappelle que le métal est globalement neutre : il y a autant de cations que d'électrons libres.

- Sachant que la masse volumique du cuivre est $\rho = 8900 \text{ kg.m}^{-3}$, et que sa masse molaire est de $M = 63,6 \text{ g.mol}^{-1}$, évaluer le nombre d'électrons libres par unité de volume du métal.

Les électrons libres peuvent être assimilés à un gaz parfait monoatomique : en l'absence de champ électrique extérieur appliqué, ils ont un mouvement désordonné d'agitation thermique, de moyenne nulle (moyenne statistique sur un grand nombre d'électrons). La vitesse quadratique est de l'ordre de 10^5 m.s^{-1} .

Lorsqu'un champ électrique existe à l'intérieur du métal, à ce mouvement désordonné d'agitation thermique se superpose un *mouvement d'ensemble* des électrons libres. La vitesse d'ensemble correspond à la vitesse moyenne (moyenne statistique sur un grand nombre d'électrons) qui est alors non nulle. Elle est de l'ordre de qq mm.s^{-1} !! On parle aussi de « vitesse de dérive ».

On rappelle que la relation entre la densité volumique de courant et la vitesse de dérive est :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= n_{mob} q \vec{v} \\ \vec{j} &= \rho_{mob} \vec{v}\end{aligned}$$

où n_{mob} est la densité volumique de porteurs de charge mobiles, et q la charge des porteurs mobiles.

On écrit aussi cette relation en introduisant la densité volumique de charges mobiles : $\rho_{mob} = n_{mob} q$.

Dans un métal, $q = -e$. On notera aussi que $\rho_{cations} = -\rho_{mob}$ dans un métal.

On considère un métal dans lequel on applique un champ électrique stationnaire et uniforme $\vec{E}$ à partir de $t = 0$.

Dans un conducteur ohmique, les interactions entre les électrons libres et le réseau de cations peuvent être modélisées par une force de frottements fluide.

- En appliquant la RFD aux électrons contenus dans un volume élémentaire dV du métal, et en notant $-h \cdot dV \vec{v}$ la force de frottement fluide, établir l'expression de la vitesse de dérive en fonction du temps. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression.
- Quelle est la vitesse de dérive en régime permanent ? A exprimer en fonction de τ .

On note que le vecteur vitesse de dérive est colinéaire au champ électrique.

- Etablir la relation entre la densité volumique de courant et le champ électrique en régime permanent.

Loi d'Ohm locale :

Dans un conducteur ohmique, le courant volumique est colinéaire au champ électrique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où γ est la conductivité du métal.

Commentaires :

- La conductivité s'exprime en $S.m^{-1}$.
- Plus la conductivité est grande, plus la vitesse de dérive est grande pour un champ électrique donné.
- La conductivité du cuivre est de $6 \cdot 10^7 S.m^{-1}$. En déduire un ordre de grandeur de τ .

Dans un métal, le temps caractéristique de l'établissement du régime permanent est de l'ordre de $\tau \sim 10^{-14}s$.

En TP, ce régime transitoire est inobservable !!

Généralisation dans le cadre de l'AROS

La loi d'ohm locale établie en régime statique se généralise au cas des régimes lentement variables tant que la période T des variations du champ électrique (régime harmonique) est telle que :

$$T \gg \tau = 10^{-14}s$$

Pour des champs plus rapidement variables, la conductivité devient complexe, ce qui signifie simplement que le courant n'a plus le temps de s'aligner sur le champ électrique (temps de réponse trop grand). A très haute fréquence, le courant tend même vers zéro, le conducteur apparaissant donc comme un filtre passe-bas (entrée = champ électrique, sortie = courant).

Loi d'Ohm locale (AROS) et électroneutralité du conducteur

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \gamma \vec{E} \\ \rho &= 0\end{aligned}$$

- Démontrer l'électroneutralité grâce à l'équation de M-G.

2.2. Expression de la résistance d'un tronçon de conducteur (rappel)

On considère un tronçon de conducteur rectiligne, de section S et de longueur L . Le champ électrique est dirigé le long du conducteur (selon $\vec{u}_x$), et on le suppose uniforme. Le courant volumique $\vec{j}$ est aussi uniforme. La face d'entrée est portée au potentiel V_A , celle de sortie au potentiel V_B . On se place en régime permanent.

- Donner les relations entre :
 - champ électrique $\vec{E}$ et ddp ($V_A - V_B$) aux bornes du conducteur
 - l'intensité I et la densité volumique de courant $\vec{j}$
- En déduire l'expression de la résistance du conducteur en fonction de sa conductivité et de sa géométrie.

Expression de la résistance (effet conductivité + géométrie conducteur)

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

2.3. Equation vérifiée par le courant

Le courant, et les deux champs électrique et magnétique vérifient tous les trois la même équation de diffusion :

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

On va résoudre cette équation dans un cas simple, et mettre en évidence « l'effet de peau ».

2.4. Effet de peau : le courant ne circule que sur les bords du conducteur

On considère un conducteur ohmique emplissant tout l'espace $z > 0$, dans le cadre de l'ARQS, et tel que la loi d'ohm est valable.

On suppose $\vec{j}(z = 0, t) = j_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$, ce courant est considéré comme une excitation, qui crée des courants dans le reste du conducteur.

- Expliquer pourquoi le courant ne dépend pas de x et y
- Expliquer pourquoi le courant n'a pas de composantes suivant y
- Démontrer que le courant n'a pas de composante suivant z .
- Proposer une forme mathématique pour $\vec{j}(z, t)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le courant.
- La résoudre en complexe
- Faire apparaître une longueur caractérisant la pénétration du courant et des champs à l'intérieur du conducteur.
- Faire application numérique
- Effectuer un bilan énergétique

*Quand la fréquence augmente, le courant circule dans une « épaisseur de peau » de plus en plus faible.
Cela a pour effet d'augmenter la résistance du conducteur (cf. expression de R avec la section S)*

*Ce résultat se généralise à toute forme du conducteur,
si l'épaisseur de peau est faible devant le rayon de courbure du conducteur (fil de cuivre en TP par exemple)*

2.5. Limite du conducteur parfait

Lorsque l'épaisseur de peau est très petite devant les dimensions du conducteur, on peut la considérer comme d'épaisseur nulle. Il n'y a alors plus aucun courant qui circule dans le volume du conducteur. Il n'existe plus qu'un *courant surfacique*.

Ce cas limite du conducteur parfait revient à faire tendre la conductivité vers l'infini.