

DS 2 -- Diffusion – Statique et dynamique des fluides (05/11/2016 – 4h)

Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés, il sera retiré 1 point /20 à la note finale.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

Aucune sortie n'est autorisée avant 12h

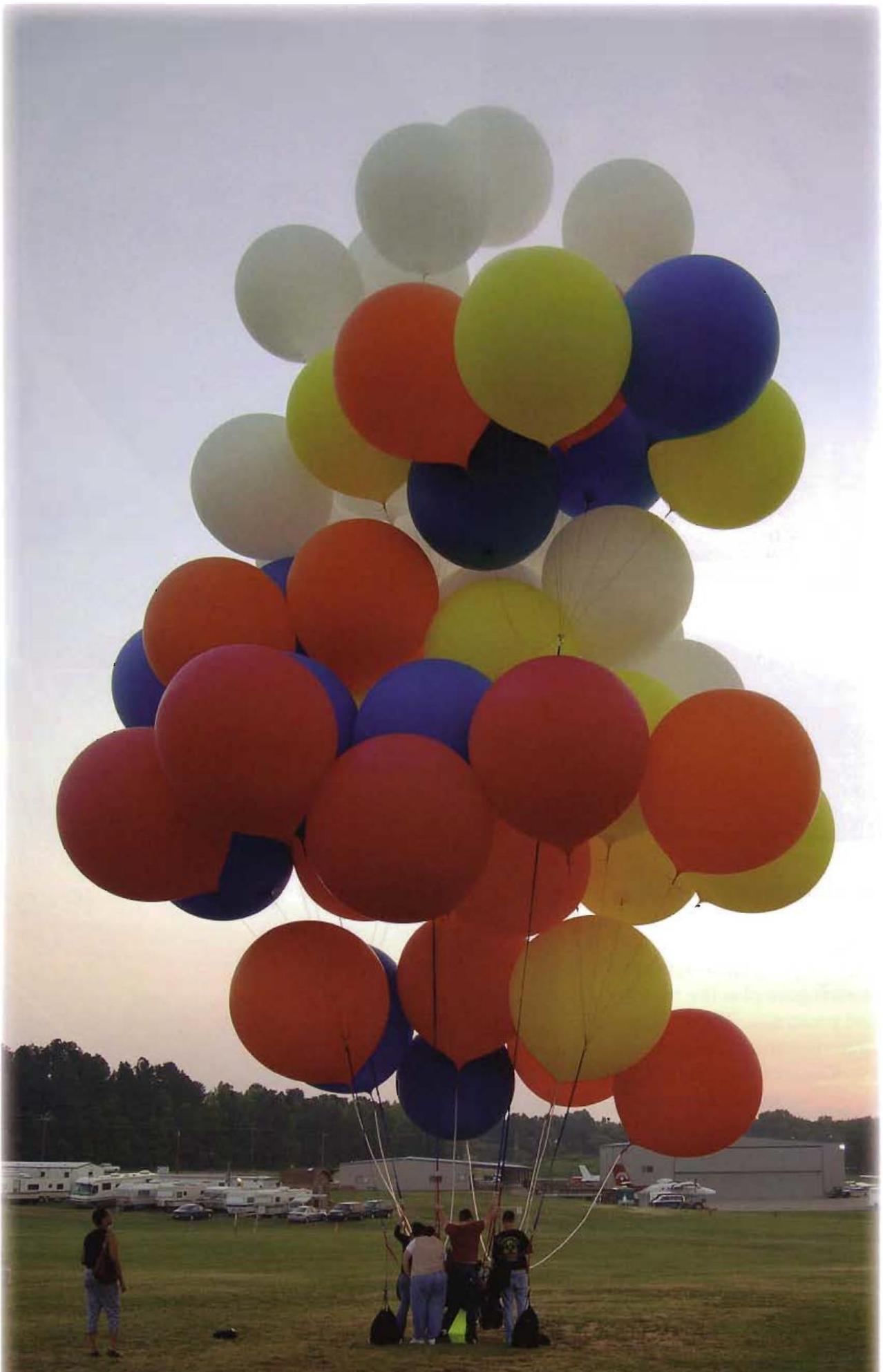
Résolution de Pb 1 : à propos du dessin animé Là-Haut de Pixar (< 30 min)

Dans le dessin animé « Là-Haut » de Pixar, on peut voir une maison transportée dans les airs par des ballons gonflés à l'Hélium. Il peut être intéressant de vérifier si la quantité de ballons représentés dans le dessin animé est suffisante pour soulever la maison.

Pour simplifier, on considère plutôt l'image ci-dessous, qui est une vraie photo de ce que l'on appelle le « Ballooning » : le vol en ballons gonflés à l'Hélium. Le dispositif représenté est censé pouvoir transporter une personne adulte.

Le nombre de ballons de la photo est-il suffisant pour transporter une personne ?

NB : ceux qui sont intéressés par cette question pourront vérifier à la maison que le nombre de ballons représentés dans le dessin animé « Là-Haut » est insuffisant. Il est possible de trouver sur internet un article de Pour la Science, signé Courty et Kierlik, le démontrant.



Problème 2 : Isolation thermique (E3A PSI 2014)

A l'heure où les économies d'énergie sont largement recommandées, un soin particulier est et devra être apporté à l'isolation thermique des bâtiments, qui se double d'isolation acoustique grâce à des matériaux permettant souvent ces deux applications.

A / ÉTUDE DU MUR SIMPLE

Considérons un mur de bâtiment (chalet de montagne en plein hiver par exemple) constitué d'un matériau homogène, isotrope, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ , supposées constantes.

Le mur est limité par deux plans (Oyz) parallèles, distants de e_B (figure 1). Les températures constantes T_{int} et T_{ext} (avec $T_{int} > T_{ext}$) sur les deux faces correspondent respectivement aux températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur du bâtiment. L'étude est unidirectionnelle, la chaleur se propageant uniquement dans la direction Ox normale à ces plans.

En un point M du mur d'abscisse x , la température est notée $T(x)$. Les dimensions de la surface S du mur dans le plan (Oyz) sont supposées grandes par rapport à son épaisseur et aucune ouverture n'est sensée venir perturber les transferts thermiques dans le mur.

L'étude est réalisée en régime permanent ; pour débiter, seuls les phénomènes conductifs sont pris en compte.

- A1.** Établir, en régime permanent et en justifiant chaque étape de votre raisonnement, l'équation différentielle de la chaleur à laquelle obéit la température $T(x)$.
- A2.** En déduire la loi de répartition de la température $T(x)$. Commenter.
- A3.** Exprimer le flux surfacique (ou densité de courant thermique) \vec{J}_{th} dans le mur. Justifier son orientation.
- A4.** Déterminer le flux thermique total Φ traversant le mur.
- A5.** Rappeler les grandeurs analogues de Φ et de $T_{int} - T_{ext}$ en électrocinétique ; en déduire l'expression de la résistance thermique surfacique définie par le rapport $R_{th} = \Delta T / J_{th}$ et préciser son unité.

Les caractéristiques d'un mur en béton armé (épaisseur e_B et conductivité thermique λ) sont mentionnées sur le tableau relatif aux matériaux sous les figures 1 et 2. Les températures sur les faces intérieure et extérieure du mur s'élèvent respectivement à $T_{int} = 19\text{ °C}$ et $T_{ext} = -15\text{ °C}$.

Le coefficient de transmission surfacique ou coefficient de déperdition thermique noté U évalue la facilité avec laquelle le transfert thermique s'effectue à travers la surface d'échange ; il représente le flux de chaleur par unité de surface pour une différence de température d'un degré entre les deux milieux extrêmes.

- A6.** Calculer (application numérique) le flux surfacique J_{th} . Montrer que le coefficient de transmission surfacique U du mur est égal à l'inverse de R_{th} . Faire l'application numérique.
- A7.** Représenter, sur le document-réponse A, le profil de température dans le mur en béton armé.
- A8.** Déterminer numériquement la profondeur e_{HG} du mur demeurant « hors gel ».

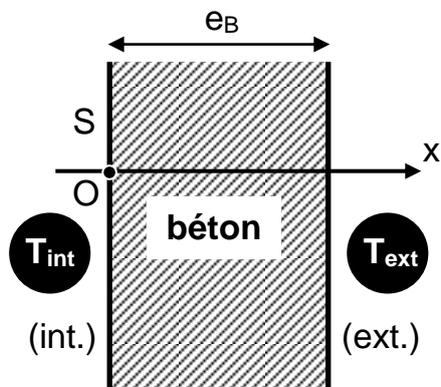


Figure 1

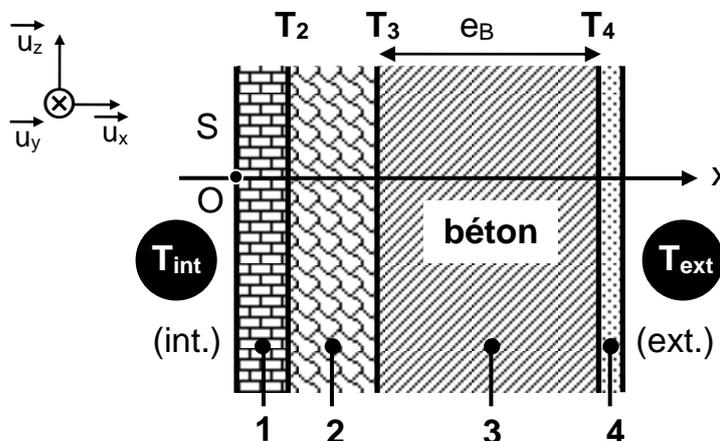


Figure 2

Couche j	1	2	3	4
Matériau	carreaux de plâtre	laine de verre	béton armé	crépis
Épaisseur e_j (cm)	5	8	20 (e_B)	2
Conductivité thermique λ_j ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	0,30	0,04	1,75	0,90

Tableau récapitulatif des matériaux constitutifs du mur composite

B / ÉTUDE DU MUR COMPOSITE

Le mur a maintenant une structure composite : il comporte quatre matériaux différents (de l'intérieur vers l'extérieur du bâtiment : carreaux de plâtre, laine de verre, béton armé, crépis extérieur), homogènes et isotropes, référencés $j = 1, 2, 3, 4$, d'épaisseur e_j , de conductivités thermiques λ_j , en contact parfait et possédant des surfaces limites isothermes (figure 2). Les températures des faces extrêmes sont toujours notées T_{int} et T_{ext} (avec $T_{int} > T_{ext}$). Le régime est permanent et aucune source interne de chaleur n'est présente dans le mur.

- B1.** Justifier puis traduire la conservation du flux surfacique J_{Cth} à travers ce mur composite.
- B2.** Déterminer la résistance thermique surfacique R_{Cth} du mur composite (figure 2) en fonction des e_j et λ_j . Calculer R_{Cth} en utilisant les données relatives aux matériaux constitutifs.
- B3.** Exprimer le coefficient de transmission surfacique U_C en fonction de R_{Cth} , puis calculer J_{Cth} et U_C , sachant que les milieux extrêmes sont aux températures $T_{int} = 19^\circ C$ et $T_{ext} = -15^\circ C$.
Comparer les coefficients U du mur simple et U_C du mur composite.
- B4.** Calculer les températures intermédiaires T_2 , T_3 et T_4 aux interfaces entre les couches, puis représenter, sur le document-réponse A, le profil de température dans le mur composite. Analyser son évolution par rapport à celui tracé en A7.

Afin de simplifier l'approche thermique de ce mur, introduisons la notion de conductivité thermique équivalente $\lambda_{MCéq}$: c'est celle d'un mur simple et homogène possédant une épaisseur et une résistance thermique respectivement égales à l'épaisseur et à la résistance thermique du mur composite.

- B5.** Déterminer puis calculer la conductivité thermique équivalente $\lambda_{MCéq}$ du mur composite.

C / MUR COMPOSITE AVEC TRANSFERTS CONVECTIFS ET RADIATIFS

Le mur composite précédent est au contact, de part et d'autre, avec l'air intérieur et l'air extérieur. Ce fluide est aux températures respectives $T_{FL,int}$ et $T_{FL,ext}$ (avec $T_{FL,int} > T_{FL,ext}$). Deux types de transferts thermiques superficiels interviennent alors : les échanges convectifs liés au déplacement de l'air et les échanges radiatifs dus au rayonnement thermique.

Ces deux modes de transfert entre les parois du mur et l'atmosphère environnante sont régis, pour un transfert de chaleur algébrique de la paroi (d'aire S) au fluide, par la loi globalisée :

$$\Phi_{RCC} = h_{RCC} [T_{paroi} - T_{fluide}] S, \text{ avec } h_{RCC} \text{ positif.}$$

Le coefficient surfacique d'échange h_{RCC} tient en compte à la fois des transferts thermiques conducto-convectifs et des transferts par rayonnement aux interfaces air-paroi. Il est noté h_{int} pour la paroi interne à la température $T_{P,int}$ au contact de l'air intérieur à la température $T_{FL,int}$ et h_{ext} pour la paroi externe à la température $T_{P,ext}$ au contact de l'air extérieur à $T_{FL,ext}$.

C1. Déterminer les nouvelles expressions du flux surfacique $J_{th,FL}$ et de la résistance thermique surfacique $R_{th,FL}$ aux deux interfaces air-mur.
Calculer la résistance thermique surfacique du mur composite $R_{Cth,FL}$.

C2. Exprimer puis calculer les températures de paroi $T_{P,int}$ et $T_{P,ext}$. Commenter.

C3. Tracer sommairement sur le document-réponse A l'évolution du profil de température au voisinage des parois murales (intérieure et extérieure). Discuter des paramètres (climatiques entre autres) qui pourraient influencer ces évolutions du profil thermique.

Données : $T_{FL,int} = 19^\circ\text{C}$; $T_{FL,ext} = -15^\circ\text{C}$; $h_{int} = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$; $h_{ext} = 30 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

D / RECHERCHE D'UNE ISOLATION OPTIMALE DU MUR

Dans le cadre de la rénovation de bâtiments (appartement ou chalet de montagne) ou de leur mise en conformité énergétique, un bureau d'étude envisage une isolation spécifique du mur composite présenté en sous-partie B. Le mur est considéré comme homogène, il possède une épaisseur e_{MC} ($e_{MC} = 35 \text{ cm}$) et une conductivité thermique équivalente $\lambda_{MC\acute{e}q}$.

Le bureau d'étude propose d'appliquer une couche isolante d'épaisseur e_{ISO} constituée de mousse de polyuréthane de faible conductivité thermique $\lambda_{PUR} = 0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et insérée en sandwich entre deux plaques de bois. Deux alternatives s'offrent à eux : isolation côté intérieur (avantage d'une moindre épaisseur) ou isolation côté extérieur du bâtiment.

Le document-réponse A fournit les tracés des profils de températures dans ces deux cas.

Parmi les nombreux problèmes à résoudre, l'un des plus délicats est celui de la congélation d'humidité liée à la perméabilité à l'air et à l'humidité des matériaux constitutifs du mur. Pour un mur en béton donné et compte tenu de l'humidité qu'il renferme, la vapeur d'eau se condense dans la zone où $T < T_S$, T_S étant la température de saturation ou point de rosée ($T_S = 5^\circ\text{C}$). L'eau liquide formée se congèle si la température baisse en dessous de $T_0 = 0^\circ\text{C}$ et son volume augmente. Les cycles répétés gel-dégel, selon les évolutions temporelles et climatiques, entraînent la dégradation des matériaux, et plus particulièrement celle du béton.

D1. Positionner sur chaque tracé du document-réponse A, les températures T_0 et T_S .
Mettre en évidence (en les hachurant de couleurs différentes) trois zones en liaison avec la valeur de la température au sein du matériau par rapport à T_0 et T_S . Décrire l'état physique de l'eau dans chacune de ces zones.

D2. Analyser les deux situations proposées. Conclure sur un choix d'isolation (extérieure ou intérieure), en tenant compte du bâtiment étudié.

Problème 3 : Echangeur de chaleur d'une machine thermique (CCP PSI 2014)

B – Etude d'un échangeur de chaleur à contre-courant.

B.1. Résistance conducto-convective.

On considère un cylindre creux constitué d'un matériau de conductivité thermique λ supposée indépendante de la température, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 (figure 3). Un fluide de température T_1 occupe l'intérieur de ce cylindre tandis qu'un fluide de température T_2 entoure l'extérieur du cylindre.

On note T_{S1} la température du cylindre sur sa surface intérieure et T_{S2} celle sur sa surface extérieure et on considère que la température au sein du matériau ne dépend que de la distance r par rapport à l'axe du cylindre. On néglige les effets de bord (comme si le cylindre était infiniment long selon l'axe des x) et on raisonne sur une longueur L de ce cylindre.

L'étude du système se fait en régime permanent.

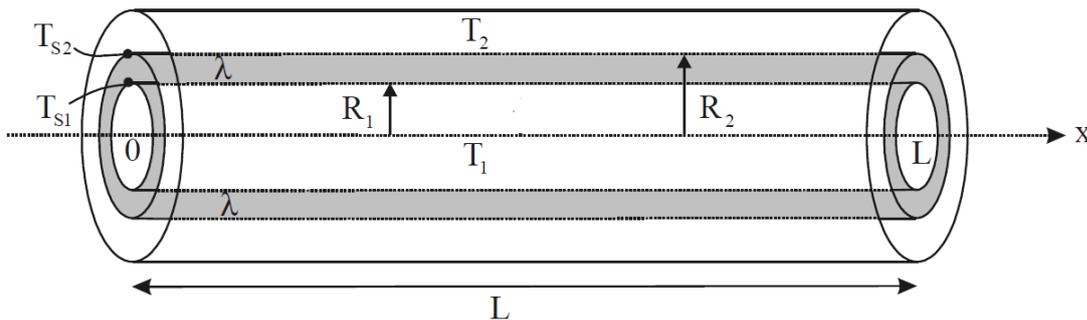


Figure 3 : échangeur de chaleur

B.1.1. Rappeler l'expression de la loi de Fourier en précisant la signification des différentes grandeurs.

B.1.2. Relier la puissance thermique Φ_{Th} au vecteur densité de puissance \vec{j}_{Th} .

Que peut-on dire, en régime permanent, de la puissance thermique Φ_{Th} traversant les surfaces latérales $2\pi R_1 L$, $2\pi r L$ et $2\pi R_2 L$? Justifier.

B.1.3. Etablir la loi d'évolution de la température $T(r)$ au sein du matériau de conductivité thermique λ en fonction de la puissance thermique Φ_{Th} .

B.1.4. En déduire la relation entre la puissance thermique Φ_{Th} transférée de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre et la différence de température $T_{S1} - T_{S2}$.

B.1.5. Définir et donner l'expression de la résistance thermique R_{Th} du cylindre de conductivité thermique λ .

Le transfert de chaleur entre un solide à la température T_s et un fluide à la température T_f se décrit en introduisant le coefficient de transfert convectif noté h_c : la puissance thermique transférée du solide vers le fluide à travers un élément de surface $d\Sigma$ est $d\Phi_{Th} = h_c (T_s - T_f) d\Sigma$. On notera h_{c1} (respectivement h_{c2}) le coefficient de transfert convectif relatif au fluide de température T_1 (respectivement T_2).

B.1.6. Relier la puissance thermique Φ_{Th} transférée en régime permanent du fluide intérieur au fluide extérieur aux différences de température $T_1 - T_{s1}$ et $T_{s2} - T_2$.

B.1.7. En déduire la relation entre Φ_{Th} et $T_1 - T_2$. Montrer alors que l'expression de la résistance conducto-convective R_{cc} de l'ensemble est donnée par la relation :

$$R_{cc} = \frac{1}{2\pi L} \left[\frac{1}{R_1 h_{c1}} + \frac{\ln(R_2 / R_1)}{\lambda} + \frac{1}{R_2 h_{c2}} \right].$$

Problème 4 : Poiseuille et perte de charge (adapté du même CCP PSI 2014)

C - Perte de charge dans une ligne de distribution cryogénique.

La ligne de distribution cryogénique, acheminant l'hélium liquide vers les différents aimants, se modélise par une conduite cylindrique de rayon R et de longueur L .

L'hypothèse d'un écoulement isobare dans une canalisation revient à négliger toute résistance à l'avancement du fluide, donc sa viscosité. Nous considérons dans cette partie le modèle plus réaliste de l'écoulement permanent de l'hélium de masse volumique ρ constante et de viscosité dynamique η .

On note $\Delta P = P_e - P_s > 0$, la variation de pression entre l'entrée et la sortie de la canalisation.

Les hypothèses simplificatrices sont :

- étude en régime stationnaire, écoulement laminaire
- on néglige les effets de bords : le champ des vitesses est unidirectionnel, dirigé selon l'axe de la conduite, on peut écrire $\vec{v} = v(r, \theta, z)\vec{u}_z$
- on néglige la pesanteur : le problème est symétrique de révolution, on peut écrire $P(r, z)$ et $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$
- l'écoulement est incompressible et homogène

C.1.1. Montrer que le champ des vitesses ne dépend que de la coordonnée radiale r .

C.1.2. Le système fermé est un cylindre annulaire compris entre $[r, r + dr]$ et $[z, z + dz]$. C'est une particule de fluide qui est infiniment petite suivant deux dimensions seulement (pas selon θ). La dessiner.

C.1.3. Montrer que l'accélération de la particule de fluide est nulle.

C.1.4. Faire un bilan des forces. Par analogie avec le cas cartésien, donner l'expression des forces de cisaillement.

C.1.5. En appliquant la RFD à cette particule de fluide, montrer que la pression ne dépend que de z , et que le gradient de pression dP/dz est constant. Quelle est sa valeur ?

C.1.6. Montrer que le champ des vitesses s'écrit : $\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)\vec{u}_z$

Dessiner le profil des vitesses dans une section droite de l'écoulement.

C.2.1. En déduire l'expression du débit massique D_m d'écoulement du fluide.

C.2.2. Calculer la perte de charge ΔP pour de l'hélium liquide à $T = 4,2$ K s'écoulant dans une conduite de rayon $R = 0,5$ cm et de longueur $L = 3$ km avec un débit volumique $D_V = 10$ L.s⁻¹. On donne $\eta = 3,6 \cdot 10^{-6}$ Pa.s et $\rho = 125$ kg/m³.

C.2.3. Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. Quelle hypothèse faite précédemment doit être remise en question ?

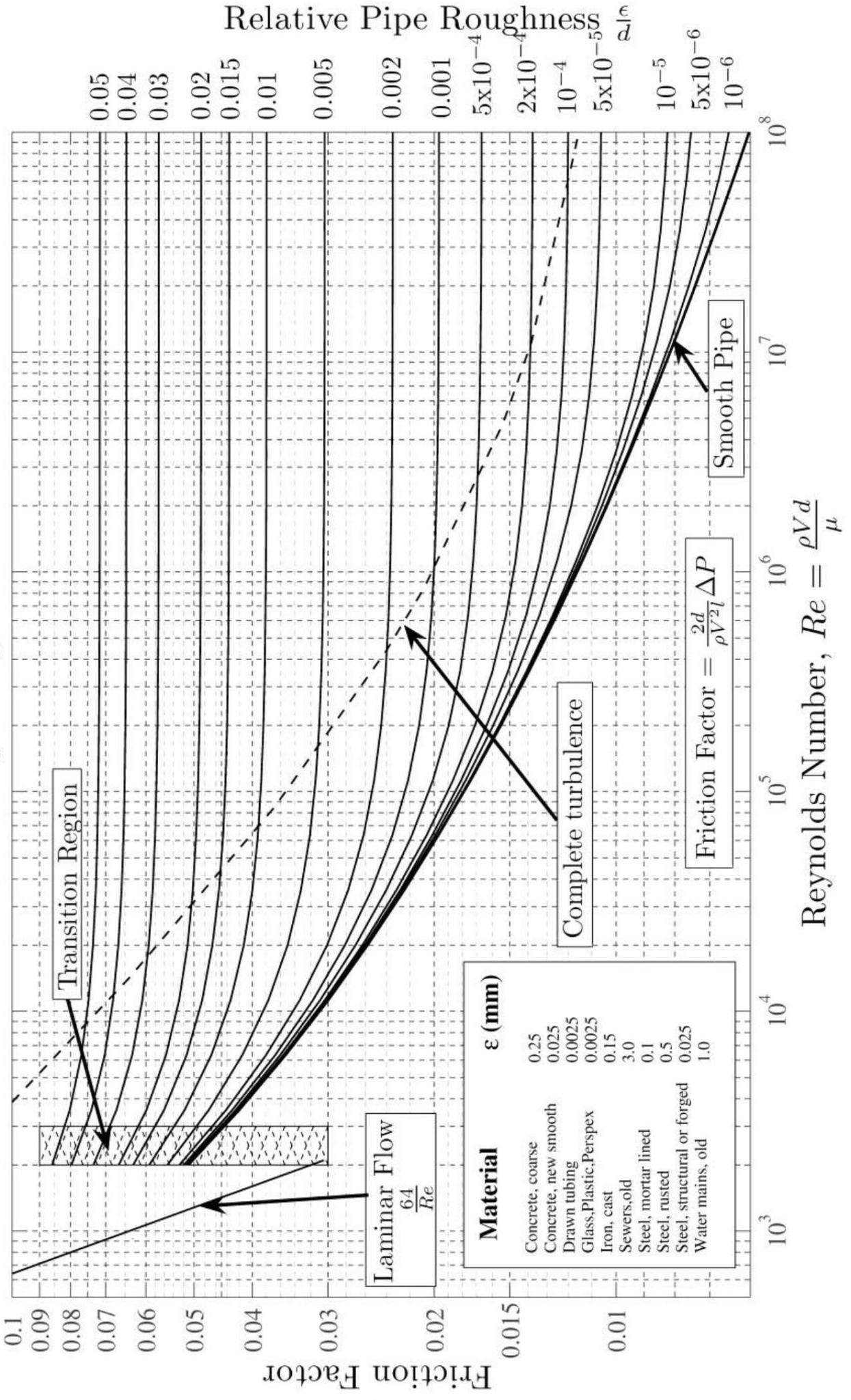
C.2.4. En expliquant précisément la démarche suivie, calculer à nouveau la perte de charge en supposant que les parois de la conduite sont parfaitement lisses (« smooth » en anglais).

NB : on trouve en page suivante un diagramme de Moody.

Notations :

- d diamètre de la conduite
- ϵ la rugosité (roughness)
- μ viscosité dynamique
- V vitesse débitante
- ρ masse volumique
- l longueur de la conduite

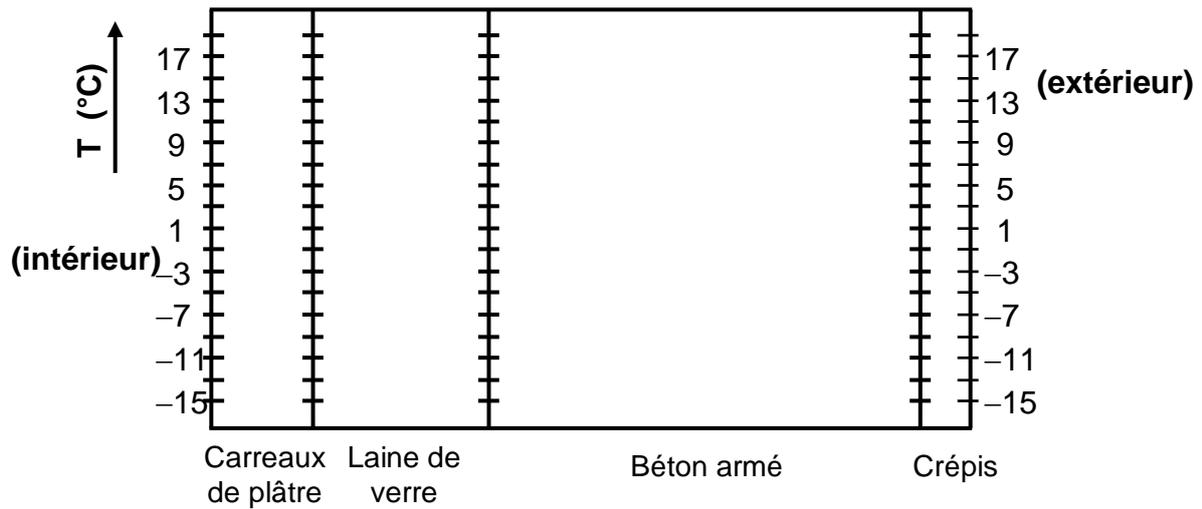
Moody Diagram



Document-réponse (Pb2 E3A), à compléter et rendre avec la copie

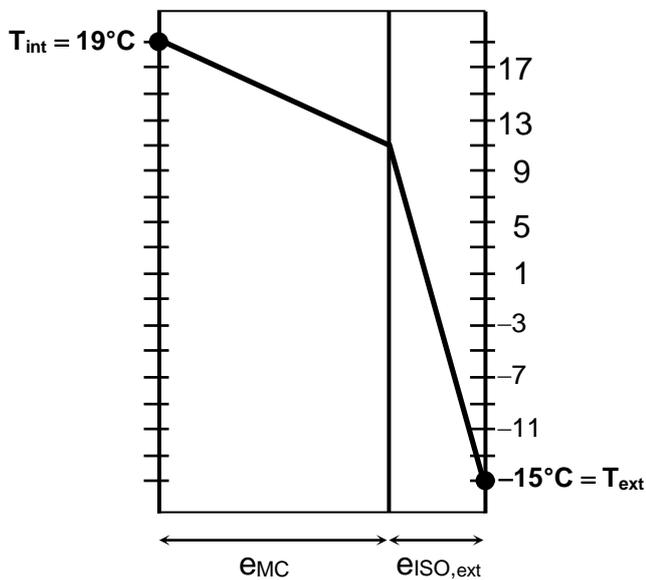
Questions A7, B4 et C3

Profil de température dans le mur (et dans le mur composite)

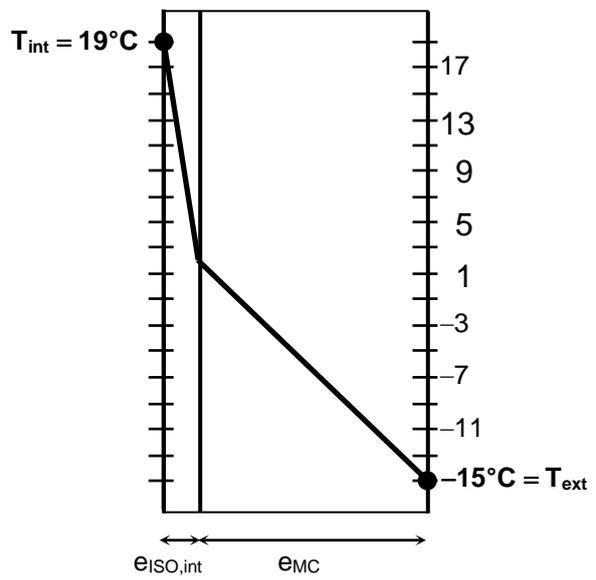


Question D1

Profils de température pour une optimisation de l'isolation



Isolation par l'extérieur



Isolation par l'intérieur

Fin de l'énoncé