Exercices – Dispersion et Absorption – Autres types d'onde

Exercice 1 : Démonstration de l'effet de peau sans passer par l'équation d'onde
Etude effet de peau seulement avec Maxwell en complexe

On cherche à propager un champ de pulsation ω s'écrivant sous forme complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \underline{k}x)$$

dans un conducteur de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1} occupant le demi-espace x > 0.
On rappelle que tant que $f \ll 10^{14} Hz$, on a ρ = 0.

1. Rappeler les équations de Maxwell et la relation liant $\vec{j}$ et $\vec{E}$ dans le conducteur.
2. En déduire que la relation de dispersion dans le conducteur s'écrit :

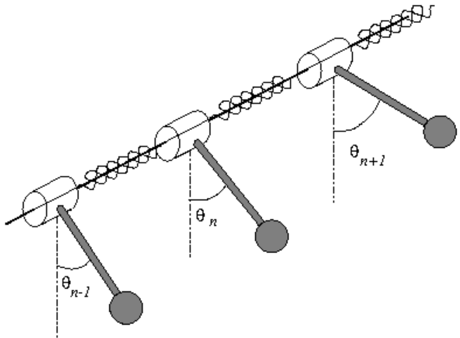
$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\omega + \frac{\omega^2}{c^2}$$

3. Montrer que dans un bon conducteur (cuivre) et aux fréquences usuelles l'un des deux termes est négligeable devant l'autre. Que vaut alors k ?
4. En déduire l'expression de E sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right).\cos(\omega t - k'x)$$

où δ est appelé profondeur de peau du conducteur, et k' partie réelle de k.
5. Calculer δ pour f = 100 MHz puis f = 10^{13} Hz.
6. (Facultatif) Etablir l'équation d'onde correspondant à la relation de dispersion de la question 2, i.e. à partir des équations de Maxwell sans négliger le courant de déplacement.
Données : **rotrot** = **grad**.div - **Δ** ; $\varepsilon_0 = 8.85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

Exercice 2 : Chaîne d'oscillateurs
- *Un exemple mécanique d'équation d'onde ≠ d'Alembert*
- *Modélise simplement la propagation d'une onde de torsion dans un solide*



On considère une chaîne de pendules couplés par un fil de torsion de constante *K*. Les pendules sont des barres homogènes toutes identiques, de longueur *l* et de masse *m*. Les pendules sont distants les uns des autres d'une distance *d*. Le mouvement du pendule situé à la position *x* est repéré par l'angle $\theta(x,t)$. Chaque pendule est soumis à une force de frottement fluide, de coefficient *f*.
Dans l'approximation des milieux continus, et des petits mouvements, on peut montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x,t)$ est la suivante (à faire en bonus) :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Kd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

1. En considérant des solutions de type « pseudo-OPPH » (i.e. avec un vecteur d'onde complexe), établir la relation de dispersion de ces ondes.
2. Interpréter physiquement le résultat, en notant *k'* et *k''* respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de *k*. Le milieu est-il absorbant ?
3. Que deviennent ces résultats si l'on néglige l'effet des frottements fluides (on distinguera deux cas) ? Calculer si possible les vitesses de phase et de groupe. Que représentent physiquement ces deux vitesses ?
4. Etablir l'expression mathématique en notation réelle de $\theta(x,t)$ <u>à haute fréquence</u> (on pourra faire un DL au premier ordre en w pour déterminer le vecteur d'onde). Discuter du résultat.

Exercice 3 : Influence de la viscosité de l'air sur les ondes sonores (CCP PSI 2003)
La prise en compte des frottements donnent une équation d'onde ≠ d'Alembert pour onde sonore

On se propose de prendre en compte la viscosité dans l'étude de la propagation des ondes acoustiques ; on rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit $d\vec{F}/dV = \eta\Delta\vec{v}$.
On considère une onde plane de la forme $\vec{v} = v(x,t).\vec{u}_x$.
a) Etablir que l'équation de propagation de v(x,t) et de p(x,t) est dans l'approximation acoustique.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 p}{\partial x^2\partial t}$$

dans laquelle c et β sont des constantes à définir.
b) On cherche pour la surpression complexe une solution de la forme $\underline{p}(x,t) = p_0\exp(j(\omega t-\underline{k}x))$ avec $\underline{k}$ complexe : $\underline{k} = k_1 - jk_2$ (k_1 et k_2 réels positifs). En déduire la relation de dispersion d'une OPPM.
c) Pour l'air on donne : $\eta = 10^{-5}$ SI et $\rho_0 = 1{,}3$ kg.m^{-3} et $c = 340$ m.s^{-1}. Calculer l'ordre de grandeur de $\eta\omega/\rho_0c^2$ et en déduire une expression approchée de k_1 et k_2.
d) Donner l'expression réelle p(x,t) de la surpression.
e) Exprimer la vitesse de phase. Dispersion ? Sur quelle distance caractéristique l'onde est-elle absorbée ?
f) Si l'on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquence est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

Exercice 4 : Influence d'un frottement fluide sur la vibration d'une corde
Idem mais pour corde vibrante

On considère une corde de masse linéique μ et soumise à une tension au repos T_0.
Un élément de corde est soumis à une force de frottement fluide

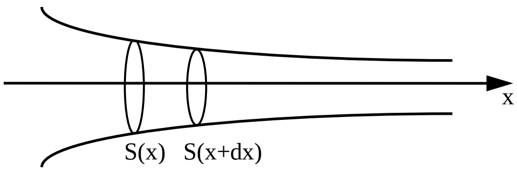
$$d\vec{f} = -\mu dx\frac{1}{\tau}\frac{\partial y}{\partial t}\vec{u}_y$$

a) Montrer que l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

b) Quelle est la relation de dispersion ?
c) Quelle est la vitesse de phase ? Le milieu est-il dispersif ? absorbant ? Quelle est la vitesse de groupe ?

Exercice 5 : Cornet acoustique
Une amplification de l'amplitude de l'onde d'origine géométrique



Pour amplifier le son perçu par l'oreille, on peut placer à son extrémité un cornet acoustique limité par une surface de révolution d'axe Ox et de section variable $S(x) = S_0\exp(-\sigma x)$ où S_0 et σ sont des constantes.
On se place dans l'approximation acoustique. L'écoulement est supposé unidirectionnel : $\vec{v} = v(x,t)\vec{u}_x$.
a) En considérant un petit élément de fluide entre les abscisses x et x+dx au repos, montrer que l'équation de conservation de la masse s'exprime par :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} - \rho_0\sigma v = 0$$

b) La RFD et l'équation liant p à μ n'étant pas modifiées (utiliser leur version linéarisée, cf. cours), en déduire que l'équation de propagation relative à la surpression p(x,t) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,.$$

c) En déduire que la relation de dispersion pour des ondes proportionnelles à $\exp j(\omega t-\underline{k}x)$ est : $k^2 - \omega^2/c^2 - jk\sigma = 0$. Discuter de la nature des ondes selon la valeur de ω et vérifier l'effet amplificateur du cornet.

Réponse *: c) pour $\omega > \omega_c = \sigma c/2$,* $k = \sqrt{\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}} + j\frac{\sigma}{2}$ *; l'onde est dispersive et amplifiée ; pour $\omega < \omega_c$, k est imaginaire pur ; ondes stationnaires amorties.*

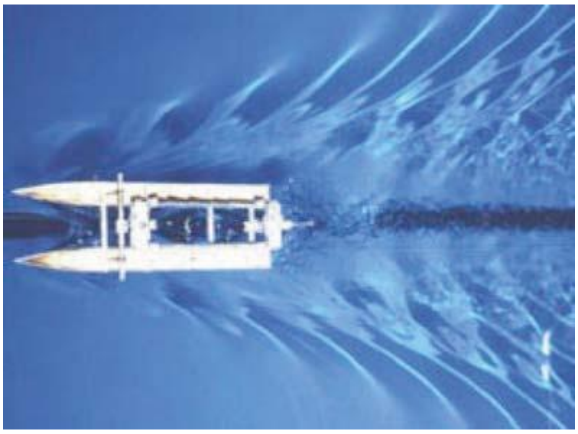
Exercice 6 : Ondes de surface dans un bassin
Etudier les ondes à la surface de l'eau

On étudie la propagation d'ondes unidimensionnelles de faible amplitude dans un bassin de longueur infinie selon Oy et de largeur L selon Ox, dont le fond est confondu avec le plan z = 0.
Au repos, la surface libre est horizontale à la cote z = h ; en présence de l'onde elle vaut $h + \xi(x, t)$, avec $\xi \ll h$.
Le champ des vitesse s'écrit $\mathbf{v} = v(x,t).\mathbf{u}_x$, l'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme $\mathbf{g} = - g\,\mathbf{u}_z$.
Les grandeurs v(x,t) et $\xi(x, t)$ sont des infiniment petits d'ordre 1.

a) En faisant un bilan de masse sur le système ouvert et fixe constitué du volume compris entre les abcisses x et x+dx, établir la relation :
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -h\frac{\partial v}{\partial x}$$
b) Etablir l'expression de la pression p(x,z,t) à l'altitude z en fonction de $\xi(x, t)$, z, h, ρ, g et P_0.
c) En déduire, grâce à la RFD dans laquelle on négligera tous les termes d'ordre supérieur à 1, la relation :
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \xi}{\partial x}$$
d) En déduire l'équation de propagation dont est solution v(x,t) et la célérité c des ondes correspondantes.
e) Quelle est la fréquence du mode fondamental d'une baignoire de largeur L = 1 m pour une hauteur d'eau h = 0,5 m ?

Exercice 7 : Sillage d'un bateau (Centrale PSI 2007)
Retrouver la valeur de l'angle formé par le sillage d'un bateau (ou de ~tout objet avançant sur l'eau)

a) Montrer que l'on peut trouver une relation de dispersion $\omega = f(k)$ telle que les vitesses de groupe et de phase sont reliées par la relation simple $v_g = \eta.v_\varphi$, où η est une constante.
b) Pour un bateau naviguant sur un bassin suffisamment profond, on peut estimer que la propagation des ondes de surface sera indépendante de la profondeur. On cherche alors une relation de dispersion de la forme $\omega = a g^\alpha k^\beta$, où a est une constante sans dimension. Déterminer les exposants α et β.Dans la suite on prendra a =1.
c) Le bateau est assimilé à un point matériel B de masse m, en mouvement pratiquement rectiligne uniforme de vitesse v. Il émet vers l'avant un paquet d'ondes de pulsation moyenne ω et dont le vecteur d'onde **k** fait un angle θ avec la vitesse.
On admet que $\omega = k.v.\cos\theta$.
En déduire les vitesses de groupe et de phase en fonction de v et θ.
d) Montrer qu'à l'instant t les paquets d'onde émis antérieurement dans la direction θ sont répartis sur une demi-droite de sommet B faisant avec la vitesse du bateau un angle ϕ tel que $\tan\phi = \sin\theta\cos\theta/(\cos^2\theta-2)$ avec $\cos\phi<0$.
d) Etudier la fonction $\phi(\theta)$ et en déduire que le sillage est limité par deux demi-droites faisant un angle 2α.
e) Vérifier cette valeur sur la photo du catamaran ci-contre.



Exercice 8 : Coefficient de réflexion et de transmission de la lumière sur un dioptre (incidence normale)

- Anciennement au programme

- Compléter les lois de Descartes en déterminant les coefficients de réflexion et de transmission (réfraction) en amplitude et en puissance, mais uniquement en incidence normale

Le raisonnement est tout-à-fait similaire à celui effectué pour les ondes sonores (dioptre acoustique). On donne quelques définitions préalables à l'exercice, notamment celle permettant de relier l'indice optique au cours sur les ondes.

Définition de l'indice complexe : $\underline{n}$

$$\underline{k} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{n}\,\frac{\omega}{c}$$

Sa partie réelle n' s'appelle l'indice de dispersion.
Sa partie imaginaire n'' s'appelle l'indice d'absorption.

D'après sa définition, l'indice regroupe toutes les propriétés du milieu qui le font s'écarter d'un comportement type « d'Alembert ». Il n'est donc pas surprenant que l'indice complexe du vide soit égal à 1.

0.1. En exprimant sa partie réelle n' en fonction de la vitesse de phase v_φ, mettre en évidence la cohérence de cette définition avec celle donnée en optique.

0.2. Justifier l'appellation 'indice d'absorption' pour sa partie imaginaire.

Définition d'un milieu transparent

Un milieu est transparent lorsque l'indice est réel ($n'' = 0$).

0.3. Donner l'expression du champ électrique d'une OPPH de pulsation ω se propageant dans un milieu transparent selon les x croissants, en exprimant le vecteur d'onde en fonction de l'indice n du milieu.

Une OPPH incidente, polarisée suivant $\vec{u}_y$ et se propageant selon les x croissants, arrive sur un dioptre situé en $x = 0$. Avant le dioptre, le milieu est d'indice n_1, après le milieu est d'indice n_2. Les deux milieux sont isolants (pas de courants ni de charges) et transparents. On admet que tous les champs oscillent avec la même pulsation ω.

1.1. Ecrire l'expression de $\vec{E}_i$
1.2. Ecrire les expressions de $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$, $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_t$. Montrer que tous les champs sont transverses.
1.3. Ecrire la continuité du champ électrique sur le dioptre (pas de charges surfacique car les milieux sont isolants)
1.4. Ecrire celle du champ magnétique. La multiplier vectoriellement par $\vec{u}_x$
1.5. En déduire les expressions de $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$. En déduire que les ondes réfléchie et réfractée sont polarisées selon $\vec{u}_y$
1.6. Déterminer les expressions des coefficients de réflexion et transmission en amplitude (électrique)
1.7. Discuter les phases des ondes réfléchie et transmise.

2.1. Déterminer les vecteurs de Poynting incident, réfléchi et transmis.
2.2. En calculant la moyenne temporelle de leur norme, déterminer les coefficients en puissance
2.3. Vérifier que l'énergie se conserve. Faire l'application numérique pour l'air $n = 1$ et le verre $n = 1{,}5$.