Mécaflu TD2 – Dynamique des fluides visqueux – Ecoulement dans conduites – Force de traînée

Exercice 1 : Ecoulement gravitaire (adapté de E3A PSI 2013)

3^e^ façon classique de faire couler un fluide
Se confronter à un énoncé de concours

Une couche d'épaisseur constante h, d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport $\nu = \eta / \rho$.

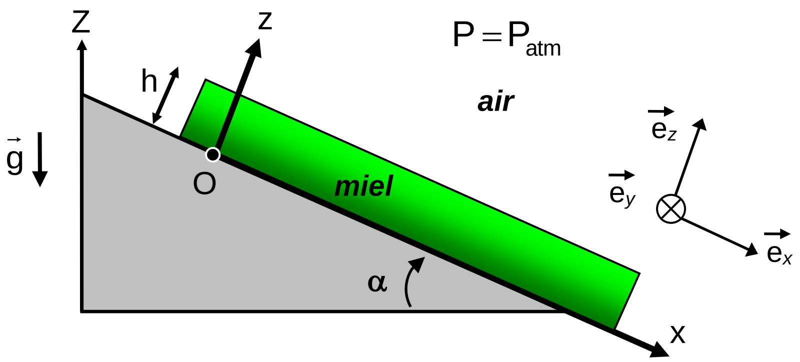


Figure 1

Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air–miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions Ox et Oy sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

A1. Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.

A2. Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ de vitesses s'écrit sous la forme : $\vec{v}(M) = v(z)\,\vec{e}_x$.

A3. Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES : $\rho \dfrac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \rho\,\vec{g} + \eta\,\overrightarrow{\Delta v}$. *(D désigne la dérivée particulaire)*

A4. Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

En déduire les expressions des composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,P$ sur cette base.

A5. Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit $P = P(z)$, puis l'exprimer.

A6. Etablir l'équation différentielle $\dfrac{d^2v(z)}{dz^2} + k\sin\alpha = 0$ vérifiée par la vitesse v(z) et identifier k.

A la surface libre, sur le plan d'équation $z = h$, la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.

A7. Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v, en $z = 0$ et à sa dérivée $\dfrac{dv(z)}{dz}$, en $z = h$.

A8. Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation : $v(z) = \beta\, z\left(2h - z\right)$. Identifier β.

Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse v_{MAX}. Calculer v_{MAX} sachant que $h = 3{,}0\ \text{mm}$, $\alpha = 10°$, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$ et que, pour le miel, $\rho = 1{,}4.10^{3}\ \text{kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10{,}0\ \text{Pa.s}$.

A9. Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur W (selon Oy) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur h.

A10. Exprimer le débit volumique Q_V du miel. En déduire la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ de l'écoulement et l'exprimer en fonction de v_{MAX}.

A11. Exprimer le nombre de REYNOLDS, écrit comme le rapport de deux termes énergétiques qu'il conviendra de justifier. En déduire son expression littérale puis sa valeur numérique. Qualifier la nature de l'écoulement.

Exercice 2 : Equation de Navier-Stokes adimensionnée

S'entraîner à l'analyse dimensionnelle
Etablir Navier-Stokes adimensionnée et y faire apparaître le nombre de Reynolds
Vérifier alors que l'EDP est la même pour toute une classe d'écoulements (intérêt maquettes)

On considère un écoulement rectiligne de masse volumique ρ, de viscosité η, de vitesse caractéristique U_c , dont les champs varient sur une longueur caractéristique L_c. Seules les forces de pression et de viscosité sont prises en compte (on ne tient donc pas compte de la pesanteur). La coordonnée repérant la position d'un point est la coordonnée x.

1. Former à l'aide des grandeurs U_c, L_c et ρ un temps caractéristique τ_c et une pression caractéristique P_c

2. On définit les grandeurs adimensionnées $v^* = v/U_c$; $x^* = x/L_c$; $t^* = t/\tau_c$ et $P^* = P/P_c$
Montrer que l'on peut alors adimensionner tous les termes de l'équation de Navier-Stokes (opérateurs compris) en introduisant un facteur constant K :

$$\frac{\partial \overrightarrow{v^*}}{\partial t^*} + \left(\overrightarrow{v^*} \cdot \overrightarrow{grad}^*\right)\overrightarrow{v^*} = -\overrightarrow{grad}^*(P^*) + K\,\vec{\Delta}^*\left(\overrightarrow{v^*}\right)$$

où K est une constante à définir. De quel unique facteur dépend la solution de l'équation ?

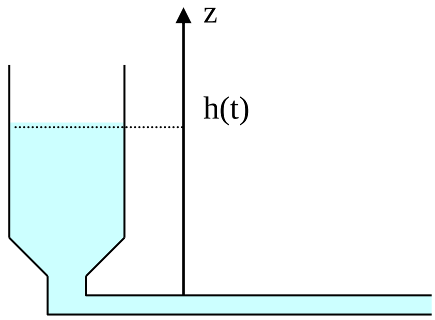
3. On étudie un avion de longueur L destiné à voler à vitesse U dans l'air. Une maquette de cet avion à l'échelle 1/10$^{\text{ème}}$ est étudiée dans une soufflerie à air. Quelle doit être, en fonction de U, la vitesse de l'écoulement ?

4. Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Quelle vitesse doit avoir l'eau pour simuler la réalité ?

Données : $\eta_{air} = 1{,}8.10^{-5}$ Pl ; $\eta_{eau} = 1{,}0.10^{-3}$ Pl.

Exercice 3 : Viscosimètre à écoulement

Découvrir une manière de mesurer la viscosité cinématique d'un fluide
Exploiter la conservation de la masse sur système macro
Comparer des odg pour valider une hypothèse simplificatrice



Un liquide visqueux considéré comme incompressible s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube horizontal de diamètre d et de longueur L. Soient ρ sa masse volumique et η sa viscosité dynamique. On définit (nu) $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \eta/\rho$ sa viscosité *cinématique*.

Données : D = 2R = 4 cm ; L = 50 cm ; d =2r= 1 mm ; g = 10m.s^{-2}.

1. Pourquoi peut-on considérer l'écoulement dans le récipient comme quasi-stationnaire ?
Il n'est pas possible de répondre rigoureusement à cette question. Il vaudrait mieux dire que l'on fait cette hypothèse, et ajouter que l'on vérifiera sa validité à la fin de l'exo. Mais ce type de questions peut hélas tomber aux concours. Il vous faut donc donner une réponse qualitative pertinente (même si elle vous paraît insatisfaisante intellectuellement).

2. En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction de h, en utilisant la loi de Poiseuille suivante (sans démo): $D_v = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P$

3. A partir de l'équation de conservation de la masse appliquée à un système ouvert bien choisi, établir une équation différentielle satisfaite par h(t), et définir un temps τ caractéristique de vidange. La résoudre pour la condition initiale $h(t_0) = h_0$.

4. Il faut 59 minutes pour que le niveau du liquide passe de h = 6 cm à h = 3 cm. Déterminer la viscosité cinématique du fluide.

5. En se plaçant dans le tube, comparer les ordres de grandeur de l'accélération locale et du terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes (attention à ce que les deux termes soient homogènes…), et valider l'hypothèse de stationnarité faite à la première question.

Exercice 4 : Chute d'une bille dans un fluide très visqueux

Partie théorique d'un de TP réalisé cette année : viscosimètre à bille
Estimer si traînée est linéaire ou quadratique en vitesse
Exploitation de mesures expérimentales

L'objectif est d'observer la chute de billes de différents diamètres dans un fluide très visqueux pour en déduire une mesure de la viscosité du fluide. L'ordre de grandeur de la viscosité du fluide est 1 Pl. Sa densité vaut 1. Les billes sont en acier, de densité d'environ 8. Les vitesses sont de l'ordre de qq $cm.s^{-1}$ pour des billes de diamètre qq mm.

1. Pour tenir compte simplement de la poussée d'Archimède dans les calculs, on définit un « champ de pesanteur apparent » g' tel que le poids associé est égal au « vrai poids » de la bille auquel a été soustrait la poussée d'Archimède. Déterminer numériquement la valeur de g'.

2. Quelle expression de la force de traînée doit-on utiliser ?

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la bille lors de sa chute dans le fluide. On précise que la bille est lâchée sans vitesse initiale à la surface du fluide.

On réalise un film d'un essai (une bille donnée) à l'aide d'une caméra rapide. L'observation de la phase transitoire de la chute montre que le régime permanent est atteint en quelques centièmes de seconde.

4. A l'aide d'un chronomètre et de marques au feutre réalisée sur l'éprouvette contenant le fluide, il est possible de mesurer la vitesse en régime permanent v_∞. On réalise cette mesure pour les différentes billes. On trace cette vitesse en fonction du carré du rayon des billes $v_\infty(r^2)$. On obtient une droite passant par l'origine. Justifier théoriquement cette observation expérimentale et en déduire une mesure du coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Exercice 5 : Puissance d'un cyclise pour compenser la traînée

Evaluer dans un cas concret les conséquences de la force de traînée pour la traction d'un véhicule
Montrer que la puissance croît avec le cube de la vitesse

Données : $C_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{tr}}{0{,}5\rho v_\infty^2 S}$
Pour des petits nombres de Reynolds $R \lesssim 1$: $C_x = \frac{24}{Re}$
Pour de plus grands nombres de Reynolds, $10^3 \leq Re \leq 10^5$, C_x est constant. On a $C_x \sim 0{,}3 - 0{,}5$
viscosité air : $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ Pl ; masse totale M = 100 kg.

On considère un cycliste roulant à v = 36 km.h^{-1}.

1. En modélisant le cycliste d'une manière très simple, montrer que la puissance P_v nécessaire pour contrer la résistance de l'air est proportionnelle au cube de sa vitesse.
2. Ce cycliste gravit une pente à 2,5 % (rapport entre l'augmentation d'altitude et la distance parcourue). La puissance P_v est-elle supérieure à la puissance du poids ?

Exercice 6 : Acheminement de pétrole dans une conduite

Odg de la puissance linéique qu'une pompe doit dépasser pour faire avancer un fluide dans une conduite

On fait couler du pétrole dans une conduite de diamètre D = 50 cm avec un débit D = 50 L.s^{-1}.
1. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement .
2. Calculer le nombre de Reynolds.
3. Calculer la puissance linéique dissipée par les forces de viscosité (par kilomètre de conduite).
Données : ρ = 870 kg.m^{-3} ; η = 0,25 Pa.s.
Réponses (je n'ai pas vérifié) : Re = 443 ; P = 407 W.

Exercice 7 : Goutte de pluie

S'entraîner à choisir le bon modèle de traînée
Estimer l'ordre de grandeur d'un régime transitoire
S'approprier un énoncé atypique

Données : $C_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{tr}}{0{,}5\rho v_\infty^2 S}$
Pour des petits nombres de Reynolds $R \lesssim 1$: $C_x = \frac{24}{Re}$
Pour de plus grands nombres de Reynolds, $10^3 \leq Re \leq 10^5$, C_x est constant. On a $C_x \sim 0{,}3 - 0{,}5$

On étudie le mouvement de gouttes de pluie dans l'air (viscosité air η = 1,5.10^{-5} Pl).

1. En régime permanent, calculer la vitesse de chute v d'une goutte de rayon $r = 1{,}0\ 10^{-5}$ m . On prendra soin de justifier le modèle de traînée adopté.
Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire de la chute de la goutte, en supposant la goutte initialement immobile ?

2. Dans un nuage, les grosses gouttes absorbent les petites gouttes chaque fois qu'elles en touchent une. En supposant que la densité volumique n de microgouttes (toutes de même rayon r) est uniforme dans le nuage, exprimer la variation dr du rayon d'une grosse goutte, de rayon initial $R_i \gtrsim 100\ r$, lorsqu'elle chute d'une hauteur $dz = v\ dt$.
En déduire comment évolue le rayon $R(t)$ au cours du temps.
Calculer la durée nécessaire pour que le rayon de la grosse goutte double de taille.
AN : $R_i = 0{,}5\ mm$ et $n = \frac{10^{-6}}{V_{nuage}}$; où V_{nuage} est le volume occupé par le nuage.

ResPb 8 : Vent contre voiture

Est-il raisonnable de dire que le vent peut renverser une voiture de dimension « usuelle » ?

On pourra s'aider de l'abaque du cours donnant le coefficient de traînée dans le cas d'un objet sphérique

Exercice 9 : Effet de peau en mécanique des fluides (CCP PSI 2008)
régime non-stationnaire
accélération non-nulle
analogie avec un phénomène électromagnétique au programme

Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan xOy. Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel) de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h. Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité). La plaque oscille à la pulsation ω, sa vitesse étant $\vec{V}_{plaque} = V_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. La pression de l'air au-dessus de la couche de liquide est égale à P_0.

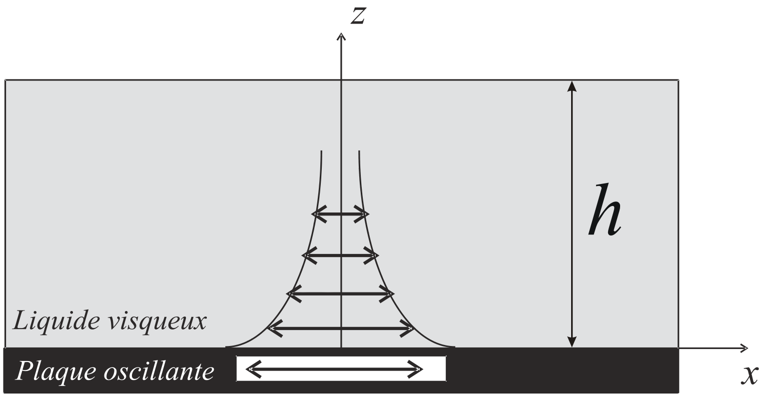


Figure 4 : géométrie de l'écoulement induit

B.22 En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, de quelles variables peut dépendre le champ de vitesse ?

B.23 Montrer que le terme convectif de Navier-Stokes est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où l'on exprimera ν en fonction de ρ et de η. (pour information, ν est appelée viscosité cinématique).

B.24 On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f(z)}.e^{i\omega t}.\vec{e}_x$, où $\underline{f(z)}$ est une fonction complexe. En réinjectant dans l'équation différentielle précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$. Donner la forme générale de $\underline{f(z)}$ *(Indice ci-dessous)* ; on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$.
En déduire l'expression du champ des vitesses, en prenant la partie réelle.

Indice :
Posez le polynôme caractéristique en complexe ; puis déterminer les racines complexes en vous rappelant que $i = \exp(\frac{i\pi}{2})$ *et que* $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

B.24bis En étudiant le comportement aux limites du fluide (vitesse connue en $z = 0$; le champ des vitesses ne doit pas diverger en $z \to +\infty$), déterminer les constantes d'intégration. Commenter l'expression obtenue.

B.25 Dans le cas d'un fluide mille fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de 10^{-3} Pa·s) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.

B.26 Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique ν est de l'ordre de $\nu \approx 10^{-2}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.