# Exercices – Diffusion de particules

**<u>Exercice 1 : Diffusion de neutrons, avec terme de création</u> ✪**

*- Introduire un terme source en plus du raisonnement classique du cours*
*- Etude du régime stationnaire*
*- Etude d'une solution aux variables séparées en régime variable*

On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S, s'étendant entre les abscisses x = 0 et x = L. On note n(M,t) le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22\ m^2.s^{-1}$.

D'autre part, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt, dans un élément de volume dτ(M), il apparaît $\delta N_p = K.n(M,t)d\tau(M)dt$ neutrons, où $K = 3{,}5\ 10^4\ s^{-1}$ est une constante positive caractéristique des réactions nucléaires.

On admettra en première approximation que *n* doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre (x = 0 et x = L). En revanche, on supposera que *n(x,t)* <u>*ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre*</u>.

**1.** Etablir l'équation de diffusion dans le cylindre.

**2.** Déterminer *n(x)* à une constante multiplicative près en régime stationnaire.
Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière $L_s$ de la longueur du barreau, et calculer $L_s$.

**3.** En régime quelconque, on cherche une solution de la forme *n(x,t) = h(x)exp(-t/τ)*. Déterminer *h(x)* et *τ*. En déduire que *n(x,t)* diverge si L est supérieure à $L_s$.

*<u>Rappels</u> :*

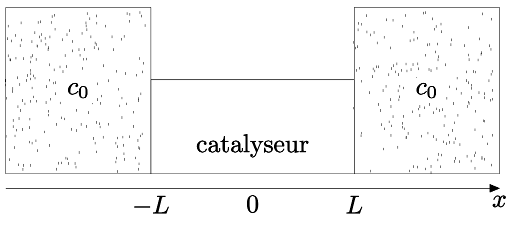
$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**<u>Exercice 2 : Diffusion dans un catalyseur</u> ✪**

*- Situation avec termes de création et de disparition couplés*
*- Solutions sous forme de fonctions hyperboliques*

On étudie une réaction chimique du type $A \rightarrow B$ s'effectuant en présence d'un catalyseur. Le catalyseur est enfermé dans un cylindre de longueur $2L$ de surface $S$. Il est au contact de deux réservoirs de molécules $A$ qui maintiennent aux extrémités une concentration constante $c_0$.

La réaction chimique étant supposée d'ordre 1, dans un volume $dV$ du catalyseur situé en $x$, il disparaît une quantité $\delta N_A = c(x) dV \frac{dt}{\tau}$ molécules $A$ durant une durée $dt$, $\tau$ désignant un temps caractéristique lié à la réaction.




La diffusion des molécules $A$ dans le catalyseur est unidimensionnelle et suit la loi de Fick avec un coefficient de diffusion $D$. Le régime stationnaire est supposé atteint et on note $c(x)$ leur concentration en un point $x$ du catalyseur.

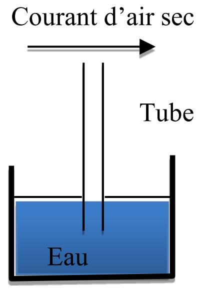
**1.** Etablir l'équation de diffusion vérifiée par $c$ et déterminer sa solution. On posera $\alpha = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}$.

Les molécules $B$ produites dans le catalyseur diffusent avec un coefficient $D'$. Elles sont prélevées aux extrémités du catalyseur de sorte que leur concentration peut y être considérée nulle.

**2.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la concentration $c'(x)$ de molécules $B$ dans le catalyseur.
Déterminer l'expression de $c'(x)$ et en déduire le flux de molécules $B$ aux extrémités du catalyseur.

*Réponses :* $c(x) = c_0 \frac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}(\alpha L)}$; $\quad c'(x) = c_0 \frac{D}{D'} \left[1 - \frac{\mathrm{ch}(\alpha x)}{\mathrm{ch}(\alpha L)}\right]$

## ResPb 3 : Mesure du coefficient de diffusion d'un gaz




Pour mesurer le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air, on réalise le dispositif suivant : un tube de section $S = 20\ cm^2$ et de longueur $L = 1{,}0$ m plonge dans un récipient rempli d'eau à $T = 25°C$. Autour du tube, le récipient est couvert par une membrane imperméable.
L'eau s'évapore et la vapeur d'eau diffuse à travers l'air dans le tube. A l'extrémité supérieure du tube, un ventilateur souffle un courant d'air sec pour chasser la vapeur d'eau. On constate que la masse d'eau évaporée par jour est 87 mg.
On donne la pression de vapeur saturante de l'eau à 25°C : $P_{sat} = 3{,}2.10^3$ Pa.

**Déterminer le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air.**

Eléments de thermodynamique :
L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local impose la continuité du potentiel chimique de l'eau à l'interface liquide – gaz. Cela se traduit par le fait qu'à l'interface liquide-gaz, la pression partielle de l'eau gazeuse est égale à la valeur tabulée de pression de vapeur saturante.

## Exercice 4 : Diffusion de molécules sous l'action d'un gradient de concentration

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique $\rho$, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique $\rho_0$ ( $\rho_0 > \rho$ ), supposées de forme sphérique.
La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date t = 0. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposerons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de type visqueux : $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$ avec $\lambda$ une constante positive).
**1.** Donner l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe Oz vertical ascendant, l'origine 0 coïncidant avec le fond du récipient).
**2.** Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite $v_{lim}$ que l'on exprimera en fonction de m, g, $\lambda$, $\rho$ et $\rho_0$.
**3.** La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire $\vec{j}_e$ des macromolécules à la côte z ; où leur concentration molaire est c(z) ( $\vec{j}_e$ correspondant à la quantité de macromolécules (en moles) traversant une surface unité horizontale pendant l'unité de durée).
**4.** La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que la densité de flux de diffusion molaire $\vec{j}_d$ des particules est donnée par la loi de Fick : $\vec{j} = -D\dfrac{\partial c}{\partial z}\vec{e}_z$. Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z.
**5.** Des mesures optiques montrent que, à 25° C, $\dfrac{c(z=0)}{c(z=2cm)} = 2$. Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ?
On donne : $D = \dfrac{k_B.T}{\lambda}$ $\rho = 1000$ kg.m$^{-3}$ et $\rho_0 = 1250$ kg.m$^{-3}$

**Exercice 5 : Evaporation d'éther**

Un tube cylindrique vertical de hauteur totale $L$, fermé à sa base et ouvert à l'air libre à son sommet, est initialement rempli sur une hauteur $h_0$ d'éther liquide. On note $S$ la section du tube.
On définit un axe vertical, d'origine prise en haut du tube, et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ dirigé vers le bas.

L'éther liquide s'évapore spontanément, et les molécules d'éther gazeux créées diffusent dans l'air situé au-dessus de l'éther liquide, jusqu'à sortir du tube. On souhaite déterminer la durée nécessaire pour que l'éther liquide s'évapore complètement.
On note $n(z,t)$ la densité volumique de molécules d'éther gazeux. La diffusion étudiée est unidimensionnelle et unidirectionnelle.

On rappelle que la pression partielle $P_i$ d'un constituant $i$ d'un mélange de gaz vérifie l'équation d'état des gaz parfait « comme si » le gaz était seul dans le volume $V$ considéré :

$$P_i V = n_i RT$$

Où $n_i$ est la quantité de matière (en moles) du constituant $i$ dans le volume $V$ considéré.

A la surface de l'éther, on admet que la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante à la température $T_0 = 293\ K$.
A la sortie du tube, la pression partielle de l'éther est négligeable.

On donne les grandeurs suivantes :
- Masse molaire de l'éther $M = 74{,}1\ g.mol^{-1}$
- Masse volumique de l'éther liquide $\mu = 626\ kg.m^{-3}$
- Coefficient de diffusion de l'éther dans l'air $D = 1{,}50\ 10^{-5}\ m^2.s^{-1}$
- Pression de vapeur saturante de l'éther à 293 $K$ : $P_S = 5{,}83\ 10^{-1} bar$
- Nombre d'Avogadro $N_A = 6\ 10^{23}\ mol^{-1}$

<u>Généralités</u>
**1.** Donner l'équation locale de conservation du nombre de molécules d'éther (cas général 3D). Interpréter physiquement chaque terme, nommer chaque grandeur apparaissant dans l'équation et donner leur unité.

**2.** Donner la loi de Fick. L'interpréter physiquement.

**3.** En déduire l'équation de diffusion.
Donner sa forme particulière dans le cas unidimensionnel étudié.

<u>Evaporation de l'éther</u>
On suppose que la durée caractéristique de variation de la hauteur $h(t)$ d'éther liquide est beaucoup plus grande que la durée caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air, de telle sorte que l'on puisse considérer que la diffusion de l'éther dans l'air se fait en régime quasi-stationnaire.

**4.** En déduire la densité volumique $n(z,t)$ de la vapeur d'éther dans l'air en fonction de $L, h(t), z$ et des données.

**5.** Exprimer le flux ascendant $\Phi(z = L - h(t))$ de molécules d'éther gazeux au niveau de la surface d'éther liquide. En déduire le taux de variation $\frac{dN_{liq}}{dt}$ de molécules d'éther liquide qui s'évaporent à l'instant $t$.

**6.** Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$.
En déduire le temps nécessaire à l'évaporation de l'éther contenu sur une hauteur initiale de $h_0 = 15\ cm$ dans un tube de $L = 20\ cm$

**7.** Vérifier l'hypothèse du régime quasi-stationnaire effectuée à la première question.

**Exercice 6 : Diffusion unidimensionnelle et absorption en surface**

On considère un cylindre d'uranium d'axe $\overrightarrow{e_x}$ et de très grande longueur $L$ devant son rayon $R$.

- L'uranium radioactif est une source de neutrons. Pendant une durée $dt$, un élément de volume $d\tau$ du cylindre produit une quantité $\delta n_p = \sigma_0 \, d\tau \, dt$ de neutrons.
- Pour des raisons de sécurité, on enveloppe le cylindre dans une feuille de plomb. Pendant une durée $dt$, une surface infinitésimale $dS$ de la feuille de plomb permet d'absorber une quantité $\delta n_a = dS \, dt \, n(M) \, \eta_0$ de neutrons, $n(M)$ étant la densité de neutrons au voisinage de la surface considérée et $\eta_0$ une constante.
- Les bouts du cylindre sont mis en contact avec une grande quantité de plomb, de telle sorte que $\forall t$ : $n(0,t) = n(L,t) = 0$

On suppose que la densité et particules dans le barreau ne dépend que de la coordonnée $x$ (pb unidimensionnel)

**1.** Quelle est l'unité du terme $\eta_0$ ?
**2.** En effectuant un bilan de matière sur une tranche d'épaisseur $dx$ de la barre, déterminer l'équation de diffusion que doit vérifier $n(x,t)$.
**3.** On suppose le régime stationnaire atteint. Trouver la répartition de particules diffusées.
**4.** On suppose maintenant que la répartition de neutrons est maintenue homogène dans le cylindre. Comment évolue la densité des neutrons en fonction du temps si initialement$\forall x$ : $n(x,0) = n_0$ ?

**Exercice 7 : Taille critique d'une bactérie**

Pour vivre, une bactérie a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau au voisinage de sa surface. La bactérie est modélisée par une sphère fixe, de rayon $R$, et sa masse volumique µ est assimilée à celle de l'eau. Le régime est considéré comme stationnaire et on note $n(r)$ la densité de dioxygène dissous à la distance $r$ du centre de la bactérie. La diffusion du dioxygène dans l'eau obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion $D$. A grande distance de la bactérie, la densité de dioxygène dissous est notée $n_0$ et est supposée constante.
On admet que la consommation en oxygène de la bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit $\mathcal{A}$ le taux horaire de consommation de dioxygène par unité de masse, mesurée en $mol.kg^{-1}.s^{-1}$.

**1.** Exprimer $\vec{j}(r)$ le vecteur densité de flux de particules diffusées, en fonction de $D$ et de $n(r)$.
**2.** Exprimer le nombre $\phi(r)$ de molécules de dioxygène entrant par unité de temps dans une sphère de rayon $r > R$ en fonction de $j(r)$. Le flux de particules $\phi$ dépend-il de $r$ pour le cas étudié ?
**3.** Déterminer l'expression de $n_s$, densité particulaire en dioxygène dissous sur la surface extérieure de la bactérie. On exprimera le résultat en fonction de $\phi, D, R$ et $n_0$.

**4.** Exprimer $\phi$ en fonction de $R, \mathcal{N}_A$, µ et $\mathcal{A}$.
**5.** En déduire l'expression de $n_s$. Quelle inégalité doit être vérifiée afin que la bactérie ne suffoque pas ? En déduire l'expression du rayon critique d'une bactérie aérobie.