

Transport fluide Chap.3 – Écoulement incompressible et homogène dans une conduite

1. Régime laminaire / turbulent – Nombre de Reynolds

- 1.1. Observations expérimentales
- 1.2. Vitesse débitante (ou « vitesse moyenne »)
- 1.3. Nombre de Reynolds – Contributions de la diffusion et de la convection
- 1.4. Utilité du nombre de Reynolds – Similitudes entre différents écoulements

2. Chute de pression dans une conduite horizontale

- 2.1. (Petits Re) Écoulement de Hagen-Poiseuille – Résistance hydraulique
- 2.2. (Tous Re) Diagramme de Moody
- 2.3. (*Complément*) Longueur d'établissement du régime établi à l'entrée d'une conduite

Intro : Nous étudions ici un type d'écoulement simple, très répandu dans la vie quotidienne et dans l'industrie : les écoulements incompressibles homogènes dans des conduites cylindriques. A cette occasion, on introduit la différence entre écoulements *laminaires* et *turbulents*, ainsi que le *nombre de Reynolds* permettant de distinguer ces deux régimes.

A bas nombre de Reynolds, le calcul analytique est possible en régime permanent. On verra qu'un écoulement dans une conduite se traduit par une *chute de pression* le long de la conduite. L'analogie sera faite avec la chute de potentiel aux bornes d'une résistance électrique traversée par un courant continu.

La nouveauté dans le programme est que nous ne traiterons plus uniquement ce cas analytique, mais utiliserons aussi les *diagrammes expérimentaux de Moody* pour prédire la chute de pression en fonction du régime d'écoulement et de la rugosité de la conduite, rapprochant un peu plus le cours de prépa d'un cours typique d'école d'ingénieur.

On insistera au cours de cette leçon sur l'intérêt qu'il y a à définir des *nombres adimensionnés* pour cerner les différentes propriétés des écoulements.

1. Régime laminaire / turbulent – Nombre de Reynolds

1.1. Observations expérimentales

L'exemple d'un écoulement d'eau sortant d'un robinet, ainsi que les vidéos projetées en cours mettent en évidence deux régimes d'écoulement. Apparemment, lorsque la vitesse du fluide est assez faible, l'écoulement est régulier. Lorsque la vitesse du fluide augmente, il existe un seuil au-delà duquel l'écoulement n'est plus régulier : en un point de l'espace le champ des vitesses *fluctue* autour d'une valeur moyenne, et ces fluctuations semblent *aléatoires*.

Un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de manière *régulière* et ordonnée. Elles glissent les unes sur les autres, comme des lames de fluide.

Il est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des *fluctuations aléatoires* de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide.

Du fait de la viscosité du fluide, le fluide situé contre les parois de la conduite est immobile, et la vitesse du fluide est vraisemblablement maximale au centre de la conduite. Si l'on souhaite connaître « la vitesse » pour laquelle la transition laminaire / turbulent se fait, quelle vitesse doit-on considérer ? L'idée la plus naturelle est de définir une vitesse moyenne dans une section droite de l'écoulement.

1.2. Vitesse débitante (ou « vitesse moyenne »)

Définition de la vitesse débitante

LA vitesse débitante U est définie par :

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D_v}{S}$$

où S est une **section droite** de la conduite.

- Cette définition vous semble-t-elle similaire à celle vue en math pour une fonction à une variable ?

1.3. Nombre de Reynolds – Contributions de la diffusion et de la convection

Dans la vidéo montrant un fluide vert venant à la rencontre d'un fluide rose, il apparaît clairement que le second acquière « du mouvement » (« de la quantité de mouvement » pour utiliser un vocabulaire scientifique précis) grâce au premier qui vient à sa rencontre. Il y a transfert de quantité de mouvement entre le fluide vert et le fluide rose, et ce transfert est visible à l'échelle macroscopique : c'est un transfert assimilable à un *choc*. On qualifie ce transfert de quantité de mouvement de **convectif** car ce transfert est associé au *mouvement macroscopique* du fluide vert. Le transfert se fait dans le sens de son mouvement macroscopique (d'où l'idée intuitive de « choc »).

Dans la vidéo montrant un fluide blanc pâteux mis en mouvement par le mouvement de la paroi inférieure le délimitant, on ne voit pas de corps macroscopique (un autre fluide ou un solide) transmettre une part de son mouvement au fluide. « Du mouvement » (« de la quantité de mouvement » pour faire référence à une grandeur physique précise) a été transmis orthogonalement au mouvement macroscopique des corps en présence. On ne voit pas de « choc » qui serait à l'origine de l'écoulement du fluide blanc. Conclusion : ce transfert de quantité de mouvement *invisible à l'échelle macroscopique* a lieu à l'échelle *microscopique*. C'est un transfert **diffusif** de quantité de mouvement.

L'expérience montre qu'entre deux fluides, le moins visqueux donne un écoulement turbulent à plus faible vitesse, les autres conditions expérimentales étant laissées égales par ailleurs. A vitesse fixée, plus le fluide est visqueux, moins l'écoulement aura tendance à être turbulent. On en déduit que la viscosité – qui est associée au transfert diffusif de quantité de mouvement – favorise le régime laminaire.

On a vu aussi qu'à fluide donné, la turbulence apparaît lorsque la vitesse du fluide augmente. On en déduit que le transfert convectif de quantité de mouvement favorise le régime turbulent.

On cherche à définir un *nombre adimensionné* dont la valeur numérique soit un *indicateur des intensités respectives de ces deux transferts de quantité de mouvement*. Ainsi, d'après les observations expérimentales mentionnées ci-dessus, il devrait être un bon indicateur pour distinguer les deux régimes d'écoulement laminaire / turbulent.

Définition intuitive du nombre de Reynolds

$$R_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Intensité du transfert convectif de quantité de mouvement}}{\text{Intensité du transfert diffusif de quantité de mouvement}}$$

Ainsi défini, un écoulement sera **turbulent** pour des nombres de **Reynolds élevés**.

L'expérience montre que deux autres paramètres influent sur la transition laminaire / turbulent :

- le diamètre de la conduite
- la masse volumique du fluide

En prenant en compte ces deux paramètres, la vitesse débitante et la viscosité dynamique, il est possible de trouver l'expression du nombre de Reynolds par analyse dimensionnelle.

- Déterminer l'expression du nombre de Reynolds par analyse dimensionnelle.

On peut aussi déterminer l'expression du nombre de Reynolds en mesurant le rapport des intensités des deux transferts grâce au rapport des temps caractéristiques de diffusion et de convection.

Définition physique du nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est le rapport des temps caractéristiques de diffusion et de convection :

$$R_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_{diff}}{\tau_{conv}}$$

- Expliquer en quoi cette définition s'accorde bien avec la définition intuitive.
- Déterminer à nouveau l'expression du nombre de Reynolds en fonction des paramètres du problème

Expression du nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{\rho V L}{\eta}$$

où ρ est la masse volumique, η la viscosité dynamique,
 V une vitesse caractéristique de l'écoulement, L une longueur caractéristique de l'écoulement

Dans le cas d'une conduite cylindrique, l'usage veut que l'on prenne la longueur caractéristique égale au diamètre de la conduite $L = 2R$, et la vitesse caractéristique égale à la vitesse débitante $V = U$. Ce choix a vraisemblablement été guidé par des considérations expérimentales : ces deux grandeurs sont les plus faciles à mesurer en pratique.

Les mesures d'Osborne Reynolds, ingénieur et physicien irlandais, datent de 1883 et sont des TP classiques effectués dans les écoles enseignant l'hydraulique (on peut trouver de nombreuses vidéos sur internet). Ces expériences montrent qu'une valeur seuil de R_e permet de distinguer les écoulements laminaires et turbulents.

Critère portant sur R_e pour distinguer laminaire / turbulent

$R_e < 2000$: l'écoulement est **laminaire**
 $2000 < R_e < 4000$: l'écoulement n'est plus laminaire à tout instant, **transition** laminaire / turbulent
 $4000 < R_e$: l'écoulement est **turbulent**

Dans une large mesure, ce classement est **indépendant des paramètres ρ, V, L, η pris isolément !**

Il peut exister des exceptions à cette classification, mais dans la très grande majorité des cas, elle est vérifiée. Si la conduite n'est pas cylindrique (section rectangulaire par exemple), les ordres de grandeur sont conservés.

Les écoulements suivants sont-ils laminaires ou turbulents ?

- Transport d'eau potable depuis lieu stockage jusque votre robinet
- Microfluidique : transport de liquides sur micropuces (rayon canaux $\sim 1 \text{ mm}$, vitesse max $10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$)
- Lubrifiant moteur de voiture (0,1 Pl)

1.4. Utilité du nombre de Reynolds – Similitudes entre différents écoulements

La situation étudiée dans ce chapitre montre que l'utilisation d'un **nombre adimensionné** permet de décrire une classe de **différents écoulements similaires**. Dans le cas du nombre de Reynolds, il permet de prédire le régime d'écoulement dans une conduite cylindrique quelque soient les dimensions de la conduite, la vitesse du fluide, et la nature du fluide. Il existe d'autres nombres de ce type en mécanique des fluides pour caractériser d'autres aspects des écoulements.

L'existence de tels nombres est cruciale pour l'ingénieur, car elle légitime la construction de *maquettes à échelle réduite* avant de produire un prototype à échelle réelle, particulièrement coûteux en général (étude aérodynamique des avions, des voitures par exemple, sillage d'un bateau, écoulement d'avalanches). Il peut effectuer des mesures sur maquette et les transposer à l'échelle réelle. Il est aussi possible d'étudier l'écoulement d'un fluide facile à manipuler (air, eau) puis transposer le résultat à un liquide cher ou moins pratique à manipuler.

2. Chute de pression dans une conduite horizontale

2.1. (Petits Re) Ecoulement de Hagen-Poiseuille – Résistance hydraulique

« Ecoulement de Poiseuille » est un écoulement provoqué par une différence de pression aux extrémités de la conduite. Il semble que cette appellation soit réservée au cas d'un écoulement *laminaire*.

A bas nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire et l'on va montrer qu'avec quelques hypothèses simplificatrices, il est facile de déterminer le champ des vitesses de manière analytique. Ce ne sera plus le cas pour des nombres de Reynolds plus grands, lorsque l'écoulement est turbulent.

Les hypothèses simplificatrices sont :

- étude en régime stationnaire
- on néglige les effets de bords : le champ des vitesses est unidirectionnel, dirigé selon l'axe de la conduite
- on néglige la pesanteur : le problème est symétrique de révolution
- l'écoulement est incompressible et homogène

La conduite est de section circulaire, de rayon R , et une différence de pression ΔP existe à ses extrémités.

Ecoulement de Poiseuille cylindrique :

1. Montrer que le champ des vitesses ne dépend que de la coordonnée radiale r .
2. Définir une particule de fluide sur le dessin. Exprimer son volume en coordonnées cylindriques.
3. Montrer que l'accélération de la particule de fluide est nulle.
4. Faire un bilan des forces. Par analogie avec le cas cartésien, donner l'expression des forces de cisaillement.
5. En appliquant la RFD à la particule de fluide, montrer que la pression ne dépend que de z , et que le gradient de pression dP/dz est constant. Quelle est sa valeur ?
6. Déterminer le champ des vitesses. Dessiner le profil des vitesses dans une section droite de l'écoulement.

6bis. (Parenthèse) Déterminer à nouveau le champ des vitesses mais en utilisant comme système le cylindre creux de longueur L défini entre $[r, r + dr]$.

7. Que vaut la contrainte exercée par le fluide sur la paroi ?

8. Déterminer le débit volumique dans la conduite.

9. Par analogie avec la loi d'ohm électrique, définir une *résistance hydraulique* en précisant les grandeurs électriques / hydrauliques analogues.

Définition de la résistance hydraulique (Poiseuille en régime stationnaire)

$$\Delta P \stackrel{\text{def}}{=} R_H D_V$$

Cette relation stipule que la **chute de pression** dans une conduite est **proportionnelle** au **débit de volume**.
La résistance hydraulique R_H dépend de la **viscosité** du fluide, de la **longueur** et de la **section** de la conduite.

➤ Concernant l'expression de la résistance hydraulique, quelles sont les similitudes et les différences avec le cas électrique ?

Associations de résistances hydrauliques

Les lois d'association des conduites sont identiques à celles valables en électricité.
De conduites en **parallèles** sont des conduites ayant leurs **deux extrémités communes**.
Des conduites en **série** sont traversées par le **même (débit volumique de) fluide**.

Les formules d'association sont les mêmes qu'en électricité, et se démontrent de la même façon.

En TD, on verra que la puissance mécanique du fluide dissipée par les frottements visqueux le long des parois se calcule par une loi analogue de l'effet Joule « $R_H \times D_V^2$ » (pas vraiment au programme).

Remarques d'ordre expérimental :

Une conduite sert généralement à transporter du fluide d'un endroit à un autre. L'expérimentateur souhaite effectuer ce transport avec un certain débit. Souvent, une des deux extrémités est à une pression fixée par l'extérieur (pression atmosphérique si cette extrémité est ouverte sur l'air ambiant), et l'expérimentateur doit se munir d'un dispositif en amont pour y fixer une pression supérieure à la pression atmosphérique, et permettant l'écoulement du fluide.

Il est clair qu'en général il doit trouver un compromis entre :

- le débit souhaité
- la pression minimale à imposer à une extrémité pour que le fluide sorte de l'autre côté
- la géométrie de la conduite (section et longueur)

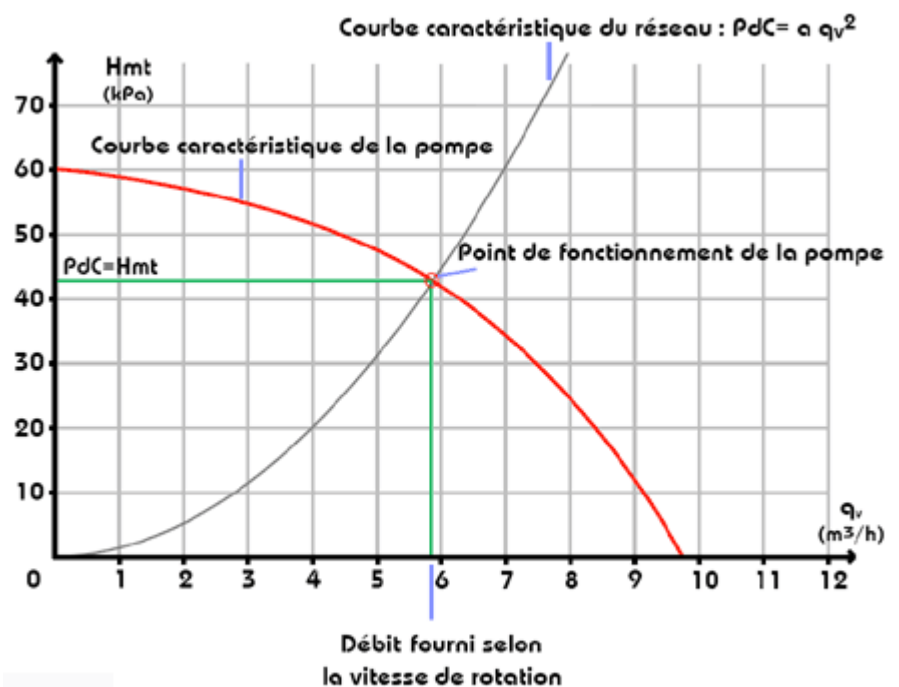
Il existe plusieurs façons d'imposer une pression à une extrémité :

- via une « grande » cuve pleine de liquide : le liquide est quasiment immobile au fond de la cuve, donc la pression à l'entrée de la conduite est donnée par l'hydrostatique. C'est un circuit hydraulique « ouvert » : la cuve se vide petit à petit (exemple du château d'eau).
- pour un gaz, le dispositif équivalent serait une bombonne où le gaz a été préalablement stocké à une pression élevée. Au fur et à mesure que la bombonne se vide, la pression diminue (cf. loi des gaz parfaits)
- via une pompe dans le cas d'un circuit hydraulique fermé (liquide ou gaz). Le rôle de la pompe est équivalent à celui d'une source de tension en électricité. Elle impose une différence de pression entre ses « bornes », qui dépend du débit volumique qui la traverse (lui-même dépendant du réseau hydraulique alimenté par la pompe, comme en élec). Cette différence de pression diminue lorsque le débit augmente : ce comportement est analogue à celui des sources de tension usuelles. En général, la courbe représentant la différence de pression en fonction du débit n'est pas affine (taper « courbe de pompe » dans Google Image pour illustrations)

Ci-dessous une « courbe de pompe » représentant la différence de pression (sortie – entrée) – notée H_{mt} – en fonction du débit volumique – noté q_v . L'ordonnée signifie « Hauteur manométrique totale », qui n'est rien d'autre que l'expression de la différence de pression créée par la pompe à ses bornes.

La courbe de perte de charge du circuit hydraulique branché sur la pompe est superposée. L'intersection des deux courbes donne le point de fonctionnement du dispositif.

On note l'analogie avec la détermination du point de fonctionnement en électricité, en superposant les caractéristiques tension-intensité de deux dipôles interconnectés.



2.2. (Tous Re) Diagramme de Moody

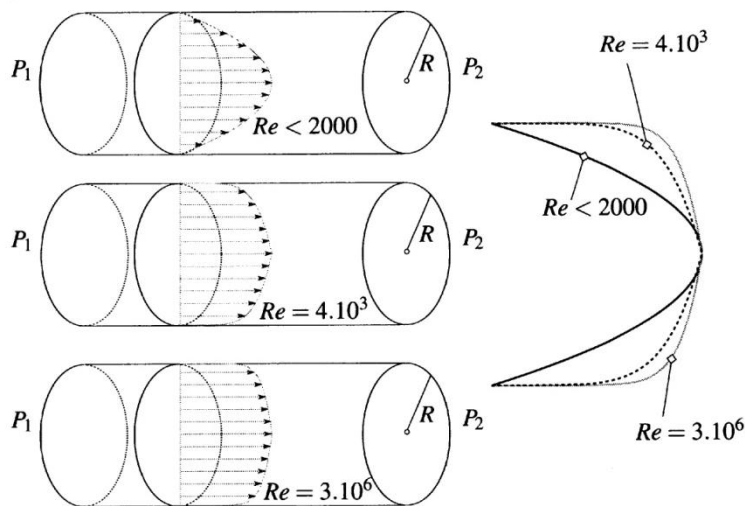
A plus haut nombre de Reynolds, le calcul précédent n'est plus valable, car il suppose implicitement que le régime est laminaire. En effet, en présence de turbulences, le régime n'est plus stationnaire puisque le champ des vitesses est sujet à des fluctuations aléatoires en fonction du temps, et en tout point de l'écoulement.

Ces fluctuations se font autour d'une valeur moyenne, qui peut-être mesurée expérimentalement ou simulée numériquement. On peut alors représenter graphiquement ce profil des vitesses moyenné dans le temps (cf. figure ci-dessous). On remarque que le profil n'est plus parabolique, mais aplati au centre de l'écoulement. La variation spatiale du champ des vitesses est localisée sur les bords de la conduite et se fait plus brutalement.

Concernant la chute de pression le long de la conduite :

- elle évolue toujours **linéairement le long de la conduite**
- mais elle **n'est plus proportionnelle au débit volumique**

La chute de pression dépend de manière complexe du nombre de Reynolds et de la rugosité des parois de la conduite. Il faut alors utiliser des 'abaques' (courbes expérimentales) pour la calculer.



Cet ensemble de courbes expérimentales tracées en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative s'appelle **le diagramme de Moody** (cf. un exemplaire à la fin du poly de cours). Être capable de l'utiliser pour déterminer une chute de pression le long d'une conduite est au programme de PSI.

Lecture du diagramme de Moody :

- Grandeur tracée en abscisse :
Facile, c'est le nombre de Reynolds.
- Grandeur tracée en ordonnée :
C'est un coefficient *adimensionné*, nommé **coefficient de perte de charge** (Friction Factor en anglais), le terme 'perte de charge' devant être considéré comme un synonyme de 'chute de pression'. Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur les significations précises de ce vocabulaire.
Par ailleurs, nous montrerons plus tard que *la pression est une forme d'énergie volumique stockable* par le fluide, au même titre que les énergies de type mécanique (cinétique, potentielle de pesanteur) déjà connues pour le point matériel ou le solide.

Cherchons ensemble la définition la plus intuitive de ce coefficient :

- Montrer qu'une pression est homogène à une énergie volumique
- Trouver une énergie volumique (connue) de référence pour exprimer la chute de pression relativement à elle
- La chute de pression étant proportionnelle à la longueur L de la conduite, il est intéressant d'exprimer le coefficient de perte de charge par unité de longueur de conduite. Que reste-t-il à faire pour rendre le coefficient adimensionné ?

- Paramètre permettant de distinguer les différentes courbes

C'est la **rugosité relative** du matériau constitutif de la conduite. La 'rugosité absolue' étant un ordre de grandeur de la profondeur des aspérités sur la surface interne de la conduite. Une fois rapportée au diamètre de la conduite, elle devient la 'rugosité relative'.



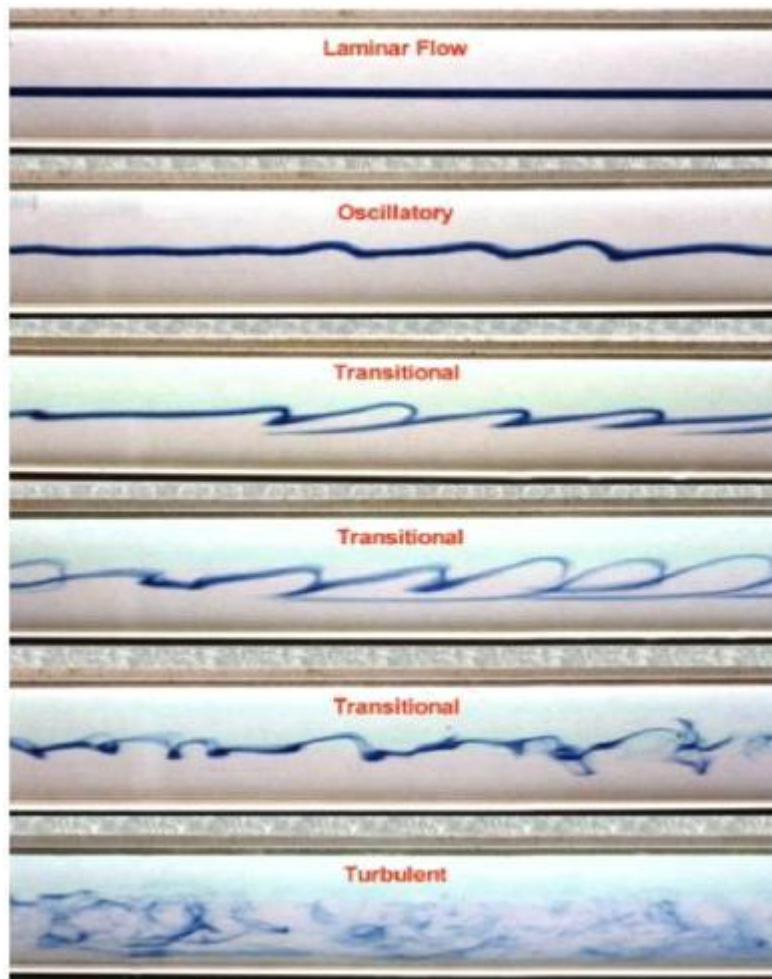
➤ Démontrer par le calcul que le coefficient de perte de charge vaut $64/R_e$ en régime laminaire.

Remarques sur la notion de « régime stationnaire en régime turbulent » (à lire sans vous casser la tête)

Il n'est pas impossible qu'un énoncé de concours puisse mentionner un écoulement qui soit à la fois stationnaire et turbulent. Cela dépend de ce que l'on entend par « stationnaire ». Il est évident que la définition que l'on en a donnée est incompatible avec la turbulence, mais on peut adapter cette définition au cas turbulent. Cette possibilité est nécessairement employée lorsque l'on trace 'le profil des vitesses en régime turbulent' (cf. figure tirée d'un bouquin).

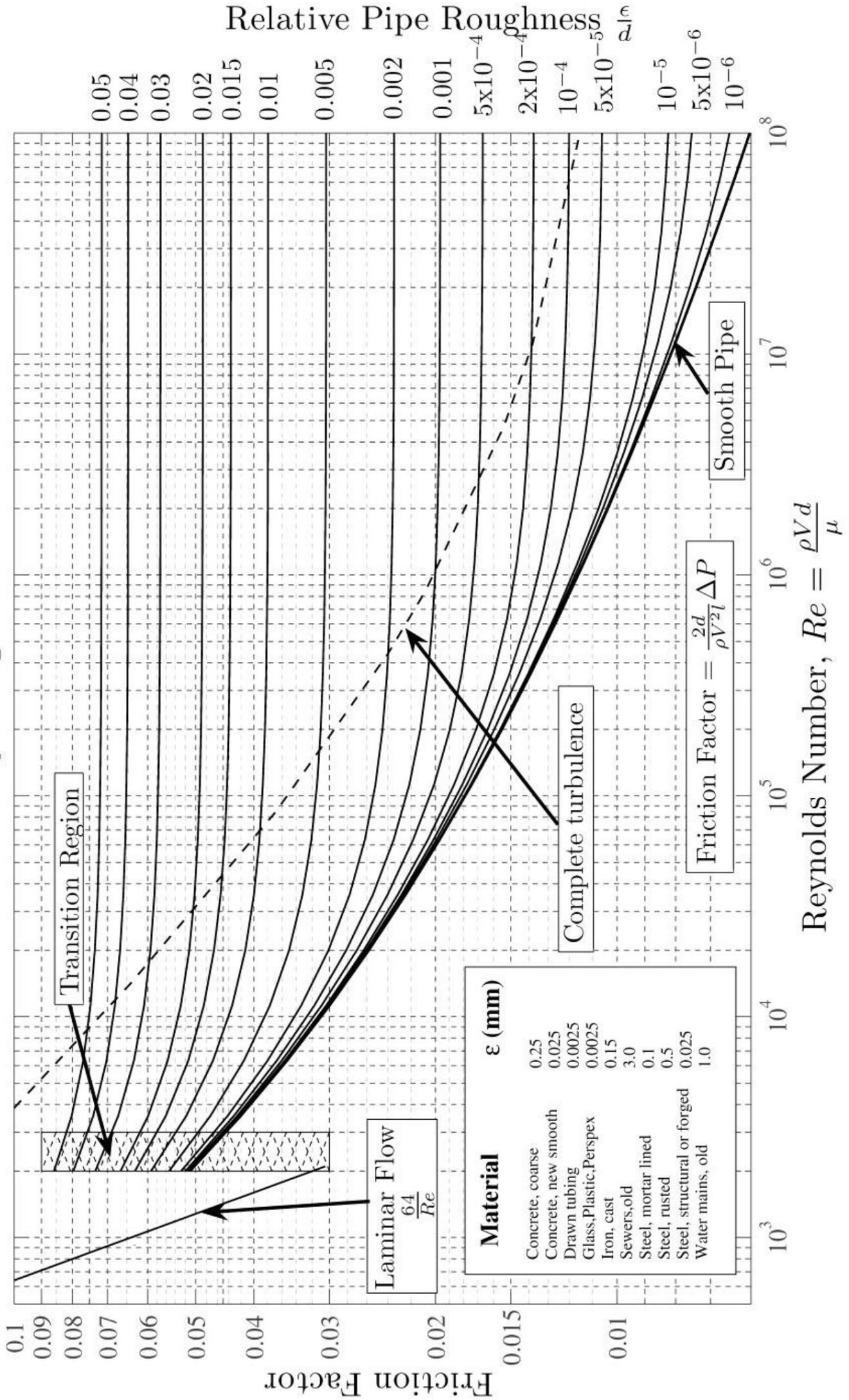
En régime turbulent, il s'avère que la vitesse fluctue dans le temps autour d'une valeur moyenne, qui – elle – est stationnaire lorsque les contraintes imposées par l'expérimentateur sont constantes dans le temps (forme de la conduite, pression aux extrémités). Dire que « la valeur moyenne est stationnaire » signifie que l'on effectue la moyenne sur une certaine durée (disons 1 seconde) et que l'on regarde comment cette moyenne évolue au cours du temps (moyenne calculée toutes les secondes pendant une minute, par exemple).

On peut retenir qu'une moyenne tend à atténuer les effets des fluctuations. C'est un fait assez général en physique. Il faut pour cela intégrer sur une échelle (temporelle dans le cas étudié) suffisamment grande devant la fréquence caractéristique des fluctuations (mais cela reste vrai si l'on est confronté à des fluctuations spatiales, comme des parasites sur une image par exemples).



2.3. *(Complément) Longueur d'établissement du régime établi à l'entrée d'une conduite*

Moody Diagram



4.3 Ecoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique	
Écoulements laminaire, turbulent.	Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
Vitesse débitante.	Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
Nombre de Reynolds.	Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion. Interpréter le nombre de Reynolds comme le

	rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection. Evaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
Chute de pression dans une conduite horizontale. Résistance hydraulique.	Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique. Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque. Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Analyse dimensionnelle	
Dimension d'une expression.	Déterminer la dimension d'une expression, notamment par référence à des expressions connues.
Recherche d'une expression de type monôme par analyse dimensionnelle.	Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E=A^\alpha B^\beta C^\chi$ par analyse dimensionnelle.

Vidéos DVD mécaflu + Manips :

- *Manip du robinet : transition laminaire / turbulent*
- *Vidéos laminaire / turbulent dans conduite : expérience de Reynolds*
- *(Courbes de pompe sur Google Image)*
- *Cours Polytech pour expliquer lecture diagramme de Moody*