Chap.7 – Filtres passifs du 1er et du 2nd ordre

Intro :
Dans ce chapitre, on va appliquer les outils introduits précédemment pour étudier *les filtres*. Intuitivement, un filtre permet de sélectionner une partie d'un signal délivré en entrée pour n'en restituer qu'une partie en sortie.

Dans la continuité de l'étude des circuits en régime sinusoïdal forcé, on va étudier *des filtres en fréquence*. Grâce à la décomposition en série de Fourier, on sait qu'un signal *périodique* est constitué d'une somme de signaux *sinusoïdaux de différentes fréquences*. Si un signal périodique « passe à travers » un filtre, seules certaines composantes sinusoïdales passeront à travers le filtre et seront présentes en sortie. Plus précisément, certaines composantes seront plus atténuées que d'autres.

Les filtres électroniques sont abondamment utilisés en pratique :
- sélection d'une station radio parmi toutes les stations disponibles
- sélectionner les bonnes gammes de fréquence pour alimenter les différents haut-parleurs d'une chaîne hifi
- télécommunications en général : on transporte de nombreux signaux simultanément dans une même ligne (téléphone, email) et l'on souhaite n'en délivrer qu'un seul en sortie à un utilisateur donné.

1. Fonction de transfert d'un filtre

La fonction de transfert d'un filtre est un *outil mathématique* qui permet d'étudier le comportement d'un filtre en fonction de la fréquence.

1.1. Notion de quadripôle

La notion de filtre nécessite de pouvoir identifier dans le montage les grandeurs *d'entrée* et les grandeurs *de sortie* du filtre. Il est donc nécessaire de repérer *deux bornes d'entrée* et *deux bornes de sortie*. Un filtre est donc constitué d'au moins quatre bornes. Dans ce cas, l'étude d'un filtre revient à étudier un *quadripôle*.

Dans la continuité des chapitres précédents, on limitera notre étude aux *circuits linéaires*. Dans le cas d'un filtre, cela signifie que l'équation différentielle reliant les grandeurs d'entrée et de sortie est une ED linéaire à coefficients constants.

- Exemple d'un filtre RC série, inséré entre le GBF et une « résistance d'utilisation » (ou « charge ») R_u : repérer l'amont du filtre (l'entrée), les 4 bornes du filtre, et l'aval du circuit (la sortie).

1.2. Fonction de transfert d'un quadripôle

Notre étude traite des *filtres en fréquence*. On va donc chercher à comprendre comment le filtre « transforme l'entrée pour donner la sortie » *en fonction de la fréquence*. On se place par conséquent en *régime sinusoïdal forcé*, et on utilise la notation complexe pour étudier le circuit.

Définition

La fonction de transfert d'un filtre est une fonction complexe de la pulsation $\underline{H}(j\omega)$ définie par le rapport entre l'amplitude complexe de la grandeur de sortie et l'amplitude complexe de la grandeur d'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{amplitude\ complexe\ grandeur\ de\ sortie}{amplitude\ complexe\ grandeur\ d'entrée}$$

On peut distinguer différents types de fonctions de transfert selon que les grandeurs d'entrée et de sortie sont des tensions ou des courants. On étudiera principalement le cas où l'entrée et la sortie sont des *tensions*. On qualifie ce type de fonction de transfert « d'amplification complexe en tension ». La fonction de transfert est alors sans dimension.

Lorsque la fonction de transfert du filtre est connue, elle donne accès aux informations suivantes :

- *son **module** donne le **rapport des amplitudes** (réelles) entre la sortie et l'entrée*
- *son **argument** donne le **déphasage entre la sortie et l'entrée***

- Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre RC (sortie = tension aux bornes de C) dans le cas où le filtre n'est pas branché à une charge en sortie.

- Etablir la fonction de transfert du même filtre dans le cas où la charge est une résistance R_u. Conclusion ?

1.3. Notion de filtre

Définition

Un filtre est un quadripôle qui transmet sélectivement et avec des caractéristiques bien définies les diverses composantes fréquentielles du signal d'entrée.

On distinguera les filtres passifs des filtres actifs. La définition passif / actif est similaire à celle donnée pour les dipôles en première période : *Un filtre actif échange de l'énergie avec le circuit* **et reçoit** *de l'énergie depuis une source extérieure au circuit.*

Le filtre RC est un filtre passif. On verra dans le prochain chapitre des filtres construits à partir de *l'amplificateur opérationnel*. Ce composant étant alimenté par une source de tension continue extérieure au circuit, ces filtres seront des filtres actifs.

1.4. Nature et ordre d'un filtre

Définition du gain $G(\omega)$ d'un filtre :

Le gain $G(\omega)$ d'un filtre est défini par le module de sa fonction de transfert

$$G(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left|\underline{H}(\omega)\right|$$

Il dépend de la fréquence et donne accès au rapport de l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée.

Nature d'un filtre

On peut distinguer 4 types de filtre idéaux, selon la dépendance du gain en fonction de la fréquence. On parle de filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande.

Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre est donné par *le degré du polynôme $\underline{D}(j\omega)$ situé au dénominateur de la fonction de transfert*.

L'ordre d'un filtre est aussi donné par *l'ordre de l'ED vérifiée par la grandeur de sortie*.

- Déterminer l'ordre du filtre RC.
- Déterminer le gain du filtre RC (avec / sans charge R_u en aval du filtre). En déduire la nature du filtre.

2. Diagramme de Bode d'un filtre

Le diagramme de Bode est un *outil graphique* qui permet de visualiser le comportement d'un filtre en fonction de la fréquence.

2.1. Intérêt d'une échelle logarithmique

Le diagramme de Bode n'est rien d'autre que la représentation graphique du module et de l'argument de la fonction de transfert en fonction de la fréquence, ***en échelle logarithmique*** (logarithme décimal).

On peut avancer deux raisons pour justifier l'utilisation de l'échelle logarithmique :

- elle permet de tracer sur un même graphe des variations importantes d'une grandeur (de 1 à 10^6 par ex)
- les capteurs du vivant sont souvent logarithmique (vision, ouïe…)

2.2. Les deux courbes du diagramme de Bode

Définition du gain en décibels G_{dB} :

Le gain exprimé en décibels G_{dB} est défini à partir du gain :

$$G_{dB} \stackrel{\text{def}}{=} 20\log(G)$$

On notera que cette définition découle d'une définition plus fondamentale à partir des puissances moyennes échangées par le filtre en sortie et en entrée. Le facteur « 20 » sert simplement à faciliter la lecture du graphe, en dilatant l'échelle en ordonnée.

Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes :

- G_{dB} *en fonction de* $\log(\omega)$
- $\Delta\varphi$ *en fonction de* $\log(\omega)$

NB : On peut aussi tracer le diagramme de Bode en fonction de $\log(f)$.

2.3. Diagramme asymptotique

Diagramme asymptotique

Constitué de segments de droite, on le détermine en cherchant un équivalent de la fonction de transfert à BF et HF. L'ensemble de ces segments de droite représente de manière simplifiée le comportement du filtre en fonction de la fréquence.

On cherchera toujours à tracer le diagramme asymptotique avant de tracer le diagramme de Bode complet. Il vous sera souvent demander de ne tracer que le diagramme asymptotique.

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique du filtre RC (sans charge en aval du filtre).
- Quelle est la pente du gain à haute fréquence (à exprimer en dB / décade)
- En vous aidant de la calculette, tracer l'allure du diagramme complet.

2.4. Bande passante à 3dB

Le filtre RC traité jusqu'à présent est un filtre passe-bas : il laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. De manière générale, pour un filtre donné, on souhaite connaître l'intervalle des fréquences que le filtre « laisse passer ». Cet intervalle s'appelle ***la bande passante*** d'un filtre.

Définition de la bande passante d'un filtre

La bande passante est l'intervalle de fréquences (ou de pulsations ω) défini par la relation suivante :

$$\omega \in Bande\ passante \iff G(\omega) > \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

La bande passante est simplement l'intervalle des fréquences se situant autour du maximum de gain.
En échelle logarithmique, la condition sur le gain en décibels s'écrit : $G_{dB} > G_{dB,\max} - 3$. On comprend ici pourquoi on parle de bande passante « à 3 décibels ».

Méthode pour trouver la bande passante

Il faut simplement rechercher les ***pulsations de coupure*** ω_c, qui délimitent la bande passante. On les trouve grâce à la relation :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Intuitivement, elles correspondent aux fréquences à partir desquelles le filtre « coupe ».

En échelle logarithmique, cette relation s'écrit $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,\max} - 3$

- Déterminer la bande passante du filtre RC.
- Indiquer qualitativement quelles sont les bandes passantes des 4 types de filtres idéaux.

3. Filtres passifs du 1er ordre - Exemple du filtre RC

Le principal objectif de cette partie est d'appliquer les nouvelles connaissances introduites à des filtres particuliers. Peu de résultats sont à retenir par cœur (mais quelques-uns quand même !). Pour votre culture en électronique, vous essaierez de mémoriser les caractéristiques du filtre RC.

3.1. Comment connaître la nature du filtre avant tout calcul

Si le filtre n'est pas trop compliqué, on peut déterminer la nature du filtre avant d'effectuer tout calcul. Pour cela, on considère les dipôles équivalents à BF et à HF des dipôles connus : R, L et C.

- A l'aide de cette méthode, montrer qu'un circuit RC série peut être utilisé pour former un filtre passe-bas ou passe-haut, selon que la tension de sortie est prise aux bornes de R ou aux bornes de C.

3.2. Filtre passe-bas

L'étude a été menée progressivement dans les paragraphes précédents.

- Synthétiser les différentes étapes de l'étude de ce filtre, ainsi que les résultats associés.
- Donner l'équivalent de la FTransfert à HF. Quelle est ***l'opération effectuée par le filtre à HF ?***

3.3. Filtre passe-haut

- Etudier le filtre RC passe-haut. On cherchera à tracer le diagramme de Bode du filtre.
- Quelle est la bande passante du filtre ?
- Quelle est l'opération effectuée par le filtre à BF ?

On retiendra par cœur les caractéristiques suivantes des filtres du premier ordre :

- *La variation du déphasage est de $\frac{\pi}{2}$ lorsque l'on balaie tout l'intervalle en fréquence.*
- *La pente asymptotique du gain est de* ***$\pm$20 dB / déc*** *dans le domaine où le filtre « coupe ».*
- *Ce type de diagramme asymptotique correspond à une opération d'intégration ou de dérivation.*

4. Filtres passifs du 2nd ordre - Exemple du filtre RLC

4.1. Nature du filtre (avant tout calcul)

- Montrer que l'on peut former les 4 types de filtre définis précédemment à l'aide du circuit RLC série.

4.2. Filtre passe-bas

Le calcul de la fonction de transfert est strictement identique à celui effectué au chapitre précédent pour établir la résonance en tension aux bornes de C.

- Montrer que ce filtre est d'ordre 2.
- Tracer le diagramme de Bode. On distinguera les cas avec / sans résonance en tension.
- Evaluer la bande passante lorsqu'il n'y a pas résonance.

4.3. Filtre passe-bande

Le calcul de la fonction de transfert est strictement identique à celui effectué au chapitre précédent pour établir la résonance en intensité.

- Etudier le filtre (FT, Bode, bande passante)

On retiendra par cœur les caractéristiques suivantes des filtres du second ordre :

- *La variation du déphasage est de π lorsque l'on balaie tout l'intervalle en fréquence.*
- *Les pentes asymptotiques BF et HF diffèrent de* ***$\pm$40 dB / déc***

Notions clefs

Savoirs :

- Définition et rôle d'un filtre, nature et ordre d'un filtre
- Définition fonction de transfert + informations que l'on peut en tirer
- Définition et utilité d'un diagramme de Bode
- Définition des fréquences de coupure et de la bande passante d'un filtre
- Résultats généraux concernant les filtres du 1^{er} et du 2^{nd} ordre

Savoirs faire :

- Connaître les différentes étapes de l'étude d'un filtre
- Déterminer la nature d'un filtre avant tout calcul (dipôles équivalents BF et HF)
- Etablir l'expression de la fonction de transfert d'un filtre en utilisant les outils du chapitre 5
- Maîtriser le tracé et la lecture d'un graphe en échelle logarithmique (sera traité en TP)
- Déterminer les équivalents BF et HF de la fonction de transfert
- Tracer alors le diagramme de Bode asymptotique + en déduire l'allure du diagramme complet
- Déterminer la bande passante d'un filtre
- Repérer le caractère intégrateur (ou dérivateur) d'un filtre du 1^{er} ordre à BF ou HF