Chap.9 – Changements de référentiels – Cinématique

Intro :
On a déjà mentionné le fait que le mouvement d'un point matériel dépend du référentiel dans lequel on se place pour l'étudier. Dans ce chapitre, on va établir les formules qui permettent de « passer d'un référentiel à un autre ». Par exemple, connaissant la vitesse du point matériel dans un référentiel, on va chercher à calculer la vitesse de ce point *dans un autre référentiel*. On fera de même pour l'accélération du point matériel.

On ne s'intéresse dans ce chapitre qu'aux *grandeurs cinématiques*, i.e. qui décrivent le mouvement. On n'évoquera les causes du mouvement (les forces) que dans le chapitre suivant.

La démonstration des formules de changement de référentiel (*les lois de composition*) dans le cas général n'est pas exigible Il s'agit surtout de savoir les retrouver et les utiliser dans les deux cas particuliers au programme de PCSI :
- référentiel en translation par rapport à un autre référentiel
- référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel

***Attention** : Dans ce chapitre, il est **impératif** de toujours préciser le référentiel depuis lequel on considère le mouvement. Cela pouvait sembler fastidieux dans les chapitres précédents, c'est absolument nécessaire à présent.*

1. Relativité du mouvement

1.1. Définition d'un référentiel (rappel)

On a déjà mentionné le fait que la trajectoire, la vitesse, l'accélération – en un mot : le mouvement – d'un point matériel dépend du « point de vue » depuis lequel on considère ce mouvement. Pour supprimer cette ambigüité, il faut préciser le *référentiel* d'étude.

Un référentiel est un « repère de référence » : ***celui depuis lequel on considère le mouvement****.*
Une fois choisi, il permet de distinguer objectivement ce qui est fixe de ce qui est mobile.

Remarque : le repère choisi comme référentiel est *fixe par rapport à lui-même* (bien-sûr).

- Faire un schéma du pendule simple. Définir un repère fixe dans le référentiel terrestre.
- Définir le repère polaire qui permet de repérer la position du point matériel.
- Si l'on choisit ce repère polaire comme référentiel, quel est alors le mouvement du pendule ?

Attention à bien faire la distinction entre repère et référentiel. Dans le cas du pendule simple, on ne choisit jamais le repère polaire comme référentiel pour étudier le mouvement du pendule !

1.2. Dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel (rappel)

On rappelle que le mouvement d'un point matériel *M* se ramène *mathématiquement* à l'étude de l'évolution temporelle du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ où *O est un point fixe dans le référentiel d'étude*. La dérivée temporelle du vecteur position définit la vitesse de *M*, et cette dérivée dépend du référentiel d'étude. On a déjà été amené à calculer la dérivée temporelle d'autres types de vecteurs : les vecteurs unitaires du repère cylindrique par exemple.

Il faut toujours ***préciser le référentiel*** *dans lequel on calcule la dérivée temporelle d'un vecteur,*
que ce soit le vecteur position ou tout autre vecteur dépendant du temps.

Si besoin, on peut utiliser la notation suivante pour la dérivée d'un vecteur dans un référentiel *R* :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R, \left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R, etc \dots$$

- Rappeler la formule du cours de SI du 1er trimestre, reliant les dérivées d'un même vecteur dans deux référentiels différents, via le « vecteur instantané de rotation » $\overrightarrow{\Omega}$.

1.3. Exemple : mouvement de la valve d'une roue de vélo dans deux référentiels

Dans le référentiel lié au cadre du vélo – celui depuis lequel le conducteur observe le mouvement – la valve est en rotation circulaire autour du centre de la roue.
Comme l'animation le montre, dans le référentiel terrestre – celui depuis lequel un piéton immobile observe le mouvement – la trajectoire de la valve est une cycloïde.
Cet exemple montre bien que la trajectoire de la valve dépend du référentiel depuis lequel on l'observe.

1.4. Objectif du cours : relier les trois mouvements

Dans ce chapitre, on va considérer le mouvement d'un point matériel dans deux référentiels, ceux-ci étant en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On sera donc amener à distinguer ***trois mouvements*** *:*
- le mouvement du référentiel « n°2 » par rapport au référentiel « n°1 »
- le mouvement du point matériel *M* par rapport au référentiel « n°1 »
- le mouvement du point matériel *M* par rapport au référentiel « n°2 »

Intuitivement, on sent bien que le mouvement de M dans le référentiel « n°2 » peut être déduit de son mouvement dans le référentiel « n°1 » (et inversement) si l'on connaît le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre.

L'objectif de ce chapitre est d'établir les formules mathématiques permettant de relier la vitesse de M dans un référentiel à la vitesse de M dans l'autre référentiel ; idem pour l'accélération. Pour y parvenir, il faut d'abord pouvoir caractériser le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre.

2. Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

Dans toute la partie 2, on oublie momentanément le point matériel, pour n'étudier que le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre.

2.1. Définition du référentiel « relatif » et du référentiel « absolu »

Par convention, on distingue :
- le *référentiel « absolu »* R, associé à un repère $\left(O;\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$
- le *référentiel « relatif » R'*, associé à un repère $\left(O';\overrightarrow{e_x{}'},\overrightarrow{e_y{}'},\overrightarrow{e_z{}'}\right)$

Cette dénomination signifie que l'on va considérer le mouvement du *référentiel relatif par rapport au référentiel absolu*. Pendant cette phase de l'étude, le référentiel absolu est fixe et le référentiel relatif bouge.

Dans une situation concrète, on distribue « comme ça nous arrange » les rôles de référentiel absolu / relatif aux deux référentiels du problème. Dans l'exemple du vélo, on peut choisir indifféremment :
- le référentiel terrestre comme absolu : on étudie alors le mouvement du cadre de vélo par rapport au sol
- le référentiel lié au cadre comme absolu : on étudie alors le mouvement du sol par rapport au cadre

En exercice, il s'agira de faire le choix le plus pratique en fonction des données de l'énoncé. Dans l'exemple du vélo, l'énoncé précisera généralement le mouvement du cadre du vélo par rapport au sol, et non l'inverse. Il sera alors plus pratique de choisir le référentiel terrestre comme référentiel absolu.

2.2. Comment définir le mouvement du référentiel relatif ?

Le mouvement du référentiel relatif (par rapport au référentiel absolu) est donné par le mouvement du repère qui lui est associé. Ce repère $\left(O';\overrightarrow{e_x{}'},\overrightarrow{e_y{}'},\overrightarrow{e_z{}'}\right)$ est caractérisé par une origine et trois vecteurs unitaires.

Le mouvement de R' par rapport à R est défini par :
- le mouvement de son origine : $\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$
- les rotations de chacun des vecteurs unitaires : $\left(\frac{d\overrightarrow{e_x{}'}}{dt}\right)_R$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_y{}'}}{dt}\right)_R$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_z{}'}}{dt}\right)_R$

2.3. Cas particulier n°1 : mouvement de translation

Mouvement de translation de R' par rapport à R

Par définition, R' effectue un mouvement de translation par rapport à R ***si la direction et le sens*** *des vecteurs unitaires de R' sont* ***indépendants du temps***.

Remarque : Attention à ne pas confondre *une translation circulaire* de l'origine O', avec une rotation de R'.

Si R' est en translation, on caractérise ce mouvement par le mouvement de son origine O' $\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$.

Exemple :
Dans l'exemple du vélo, on choisit le référentiel terrestre comme référentiel absolu (R), et le référentiel lié au cadre du vélo comme référentiel relatif (R'). On note $\vec{V}(t)$ la vitesse d'un point du cadre par rapport au sol. C'est une donnée de l'énoncé, et cette vitesse n'est pas nécessairement constante.

- Définir un repère fixe dans le référentiel absolu.
- Définir un repère fixe dans le référentiel relatif.
- En déduire que le référentiel lié au cadre du vélo est en translation par rapport au sol.
- Comment caractériser le mouvement du référentiel relatif ?

2.4. Cas particulier n°2 : mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

Mouvement de rotation uniforme de R' autour d'un axe fixe dans R

Par définition, *R'* effectue un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe si :
- on peut définir son origine ***O'* fixe** dans *R*
- ses vecteurs unitaires sont en **rotation autour d'un axe fixe** dans *R*
- la vitesse angulaire de rotation est **constante**

Sans perte de généralité, on pourra toujours définir les repères de *R* et *R'* de sorte que :
- l'axe $(O, \vec{e_z})$ est l'axe de rotation
- les origines *O* et *O'* sont confondues
- les axes $\vec{e_z}$ et $\vec{e_z'}$ sont confondus (donc $\vec{e_z'}$ est immobile dans *R*)

Exemple :
On considère l'exemple d'un tourniquet représenté par un plateau horizontal en rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe dans le référentiel terrestre. La rotation s'effectue dans le sens positif, défini par rapport à la verticale ascendante. On choisit le référentiel terrestre comme référentiel absolu (R), et le plateau du tourniquet comme référentiel relatif (R').
- Définir un repère fixe dans le référentiel absolu.
- Définir un repère fixe dans le référentiel relatif.
- Représenter sur le schéma l'angle θ permettant de repérer la rotation du référentiel relatif.
- Qu'est-ce que la vitesse angulaire de rotation de R' dans R ?

Toujours dans le cas du tourniquet, on souhaite caractériser le mouvement du référentiel relatif. Il nous faut donc exprimer les dérivées temporelles de $\vec{e_x'}$ et $\vec{e_y'}$:
- Calculer les dérivées $\left(\frac{d\vec{e_x'}}{dt}\right)_R$ et $\left(\frac{d\vec{e_y'}}{dt}\right)_R$ en fonction de $\dot{\theta}$, $\vec{e_x'}$ et $\vec{e_y'}$

Pour exprimer plus simplement les résultats, on définit le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e_z}$. On peut aussi l'appeler « vecteur vitesse angulaire » de la rotation de R' par rapport à R.
- Exprimer alors les dérivées $\left(\frac{d\vec{e_x'}}{dt}\right)_R$; $\left(\frac{d\vec{e_y'}}{dt}\right)_R$ en fonction du vecteur rotation

Si R' est en rotation uniforme autour d'un axe fixe, on caractérise ce mouvement par le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

2.5. Cas général : décomposition en une translation et une rotation

Le cas général d'un mouvement quelconque de *R'* ne sera jamais traité en exercice. Même si l'on va établir les lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas général, seuls les calculs dans les deux cas particuliers envisagés jusqu'à présent sont exigibles.

L'idée clef est qu'un mouvement quelconque de *R'* peut se décomposer en un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe *non fixe*. On peut alors exprimer les lois de composition (pour les vitesses et les accélérations) en fonction du vecteur rotation instantané. On ne le fera pas.

3. Loi de composition des vitesses

Maintenant que l'on est capable de caractériser le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu, on va établir la relation mathématique reliant les vitesses du point *M* dans chacun des référentiels : c'est *la loi de composition des vitesses*.

3.1. Définition de la vitesse « absolue » et de la vitesse « relative »

On qualifie de « vitesse absolue » la vitesse du point matériel *M* par rapport au référentiel absolu. On qualifie de « vitesse relative » la vitesse du point *M* par rapport au référentiel relatif.

- Ecrire mathématiquement la définition du vecteur vitesse $\vec{v}(M)_R$ du point M dans le référentiel absolu R
- Faire de même pour le vecteur vitesse $\vec{v}(M)_{R'}$ du point M dans le référentiel relatif R'

3.2. Loi de composition des vitesses (cas général)

Voici les différentes étapes de la démonstration :

- Etablir la relation entre les deux vecteurs positions du point *M* (celui dans R et celui dans R')
- Dériver l'expression précédente, puis utiliser la formule de SI (paragraphe 1.2)
- En déduire la loi de composition des vitesses donnée ci-dessous

On retiendra la relation entre la vitesse absolue et la vitesse relative (loi de composition des vitesses) :

Loi de composition des vitesses

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})_{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})_{\boldsymbol{R'}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_e}}$$

La vitesse $\overrightarrow{v_e}$ s'appelle *la* ***vitesse d'entraînement***. Elle ne dépend que du mouvement de R' par rapport à R. En général, elle dépend du temps. Il faut pouvoir la connaître à tout instant pour relier la vitesse absolue à la vitesse relative.

On ne retiendra pas l'expression générale de la vitesse d'entraînement. Il s'agit simplement de retrouver son expression dans les deux cas particuliers au programme de PCSI. Pour cela, on va introduire la notion de point coïncident.

3.3. Le point coïncident : un outil pour trouver la vitesse d'entraînement

On remarque que la vitesse d'entraînement peut s'interpréter comme la vitesse dans *R* d'un point *P confondu* avec le point *M* à l'instant *t*, et *immobile dans* R'. Ce point *P* est le point immobile dans *R'* qui coïncide avec *M* à l'instant *t*.

Définition du point coïncident

On définit un point coïncident à chaque instant *t*.
C'est le point ***P qui coïncide avec la position de M*** *à l'instant t*, **puis** ***immobile dans R'***.

Par construction, la vitesse du point coïncident (par rapport à R) est la vitesse d'entraînement.

Remarque importante : *A chaque instant t, il faut définir un point coïncident pour cet instant précis. En effet, la position et la vitesse du point coïncident dépendent de la position du point M dans le référentiel relatif, qui généralement varie avec le temps.* ***A chaque instant, il faut identifier un nouveau point coïncident***.

3.4. Cas particulier n°1 : référentiel relatif en translation

Reprenons l'étude du mouvement de la valve d'une roue. Le mouvement de la valve dans le référentiel relatif est simple : c'est une trajectoire circulaire, et la vitesse relative est donc facile à calculer. On cherche alors à en déduire la vitesse absolue (plus difficile a priori) grâce à la loi de composition des vitesses.
On a déjà défini des repères fixes dans chacun des deux référentiels.

- Définir un repère cylindrique *mobile* dans le référentiel relatif qui permet de repérer plus simplement la position de la valve dans le référentiel relatif.
- Exprimer la vitesse de la valve dans le référentiel relatif.
- Exprimer la vitesse d'entraînement en utilisant la notion de point coïncident.
- En déduire la vitesse de la valve dans le référentiel absolu (l'expression qui demande le moins de calcul)

On remarque qu'à chaque instant la vitesse d'entraînement est uniforme, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la position de la valve à l'instant considéré. C'est un cas très particulier ; ce n'est valable que lorsque le référentiel relatif est en translation par rapport au référentiel absolu.

Lorsque le référentiel relatif est en **translation :** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R}$

3.5. Cas particulier n°2 : référentiel relatif en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Reprenons l'exemple du tourniquet. A l'instant $t = 0$, une bille est lancée *depuis le centre du tourniquet* avec un vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ connu. On néglige les frottements solides du plateau sur la bille.
On rappelle que l'on a déjà défini des repères fixes dans chacun des deux référentiels.

- A $t = 0$, pourquoi n'a-t-on pas besoin de préciser le référentiel pour définir $\overrightarrow{v_0}$?
- Pour un instant *t* quelconque, montrer que la vitesse de la bille est constante dans le référentiel absolu.
- A l'instant *t*, identifier le point coïncident, puis exprimer la vitesse d'entraînement en fonction de $\overrightarrow{\Omega}$.
- En déduire la vitesse de la bille dans le référentiel relatif.

Ici, la vitesse absolue se détermine facilement, et on en a déduit le vitesse relative grâce à la loi de composition des vitesses.

On remarque qu'à chaque instant la vitesse d'entraînement n'est pas uniforme. Elle dépend de la position de la bille dans le référentiel relatif. On retiendra bien que le point coïncident doit donc bien être identifié à chaque instant.

Lorsque le référentiel relatif est en **rotation** *uniforme autour d'un axe fixe* **:** $\boldsymbol{\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}}$
où ***H est le projeté orthogonal de M*** *sur l'axe de rotation*.

4. Loi de composition des accélérations

4.1. Définition de l'accélération « absolue » et de l'accélération « relative »

L'accélération du point matériel *M* par rapport au référentiel absolu est qualifiée *d'accélération absolue*. L'accélération du point *M* par rapport au référentiel relatif est qualifiée *d'accélération relative*.

- Ecrire mathématiquement la définition du vecteur accélération $\vec{a}(M)_R$ de M dans le référentiel absolu R
- Faire de même pour le vecteur accélération $\vec{a}(M)_{R'}$ du point M dans le référentiel relatif R'

4.2. Loi de composition des accélérations (cas général)

On repart de la loi de composition des vitesses, et voici les étapes de la démonstration :

- Dériver la loi de composition des vitesses, en se plaçant dans *R*
- Utiliser la formule de SI pour développer le 2e terme de la composition des vitesses
- En déduire la loi de composition des accélérations.

On retiendra la relation entre l'accélération absolue et l'accélération relative :

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{a_e} + \vec{a_c}$$

L'accélération $\vec{a_e}$ s'appelle ***l'accélération d'entraînement***.
L'accélération $\vec{a_c}$ s'appelle ***l'accélération complémentaire*** (ou *accélération de* **Coriolis**).
Ces deux accélérations caractérisent ensemble le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu. En général, elles dépendent du temps. Il faut pouvoir les connaître à tout instant pour relier l'accélération absolue à l'accélération relative.

On ne retiendra pas l'expression générale de l'accélération d'entraînement. Il s'agit simplement de retrouver leur expression dans les deux cas particuliers au programme de PCSI.

4.3. Le point coïncident : un outil pour trouver l'accélération d'entraînement

D'après les expressions établies dans le paragraphe précédent, on remarque que l'accélération d'entraînement peut être interprétée comme l'accélération d'un point confondu avec le point *M à l'instant t,* et *immobile par rapport à R'*. On reconnaît ici la définition du point coïncident.

Par construction, l'accélération du point coïncident (par rapport à R) est l'accélération d'entraînement.

Remarque importante : ***A chaque instant, il faut identifier un nouveau point coïncident****. Le point coïncident* ***n'est pas un point matériel****, mais un point fictif que l'on doit identifier à chaque instant pour faciliter les calculs. Il apparaît clairement d'après les expressions de $\vec{v_e}$ et $\vec{a_e}$ que $\vec{a_e} \neq \left(\frac{d\vec{v_e}}{dt}\right)_R$ dans le cas général !!*

4.4. Accélération complémentaire (ou accélération de Coriolis)

Pour calculer l'accélération complémentaire, il n'existe pas de notion équivalente au point coïncident.

$$\vec{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}$$

On retiendra qualitativement que :

- l'accélération complémentaire est **nulle si *R'* en translation**
- quelque soit le mouvement de *R'*, l'accélération complémentaire est **nulle si la vitesse relative est nulle**
- l'accélération complémentaire est toujours orthogonale à la vitesse relative

4.5. Cas particulier n°1 : référentiel relatif en translation

En reprenant l'étude du mouvement de la valve de la roue de vélo :

- Calculer l'accélération relative de la valve.
- Déterminer l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire.
- En déduire l'accélération absolue de la valve.

On retiendra que :

Si le référentiel relatif est en translation :

$$\overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R$$

$$\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$$

4.6. Cas particulier n°2 : référentiel relatif en rotation uniforme autour d'un axe fixe

En reprenant le cas du tourniquet :

- Calculer l'accélération absolue de la bille.
- Déterminer l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire.
- En déduire l'accélération relative de la bille.

On retiendra que :

Si le référentiel relatif est en rotation uniforme autour d'un axe fixe :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'}$$

$$\overrightarrow{a_e} = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

où H et le projeté de M sur l'axe, et ω la vitesse angulaire de rotation

Remarque : Dans le cas étudié, la bille appartient au plan $\left(O'; \overrightarrow{e_x}', \overrightarrow{e_y}'\right)$. Dans le cas général d'une position quelconque de la bille, démontrer la formule donnant l'accélération d'entraînement.

Notions clefs

Savoirs :

- Définition d'un référentiel
- La dérivée temporelle d'un vecteur dépend du référentiel
- Définitions des vitesses relative / absolue et des accélérations relative / absolue
- Comment définir le mouvement d'un référentiel + définition des deux cas particuliers étudiés
- Loi de composition des vitesses et des accélérations
- Définition du point coïncident
- Connaître *par cœur* les expressions de $\overrightarrow{v_e}$, $\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{a_c}$ dans les deux cas particuliers étudiés

Savoirs faire :

- Distinguer la notion de référentiel et la notion de repère
- Bien distinguer les différents mouvements (au moins 3) de la situation étudiée
- *Retrouver les expressions de la vitesse et de l'accélération d'entraînement grâce au point coïncident*
- Refaire les exemples traités en cours