Chap.2 – Cinématique des fluides

Intro :
En première année, les fluides ont été étudiés au repos. La loi essentielle était la relation fondamentale de la statique, qui traduisait simplement la RFD au repos appliquée à un volume élémentaire de fluide.
Ce nouveau chapitre est le premier de la mécanique des fluides en mouvement. Comme en mécanique du point, on commence par décrire le mouvement du fluide, sans se préoccuper des causes du mouvement. On ne parlera donc pas ici des forces, on se limite à une étude cinématique.

1. Description d'un fluide en mouvement

1.1. Description lagrangienne – Description eulérienne

Deux points de vue sont possibles pour décrire l'écoulement d'un fluide. Si l'on regarde couler une rivière :

- un observateur peut suivre des yeux une feuille à la surface de l'eau (point de vue lagrangien)
- un observateur peut aussi regarder fixement une zone de la rivière et voir passer la feuille quand elle traverse son champ de vue (point de vue eulérien)

Dans les deux cas, on décrit le fluide à l'échelle mésoscopique : système = volume élémentaire de fluide $d\tau$.

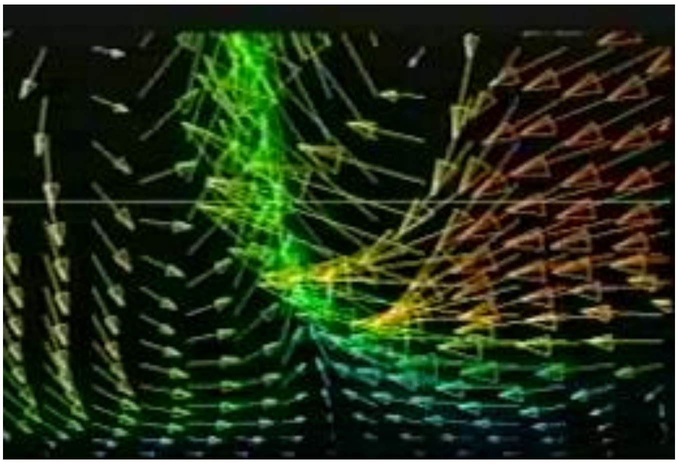
Description lagrangienne :

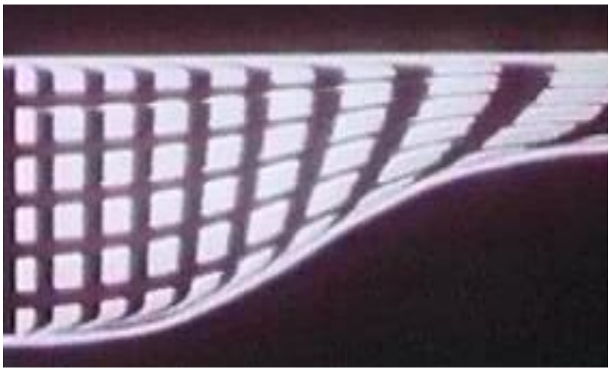
- on découpe le fluide en volumes élémentaires, chacun étant un système ***fermé***. Ainsi, ces volumes sont de masse constante et sont mobiles. On les nomme ***« particule de fluide »***
- on associe un observateur à chacune, son regard suit la particule au cours du temps
- les coordonnées d'espace $\vec{R} = [X(t), Y(t), Z(t)]$ représentent la position d'une particule de fluide et sont donc des fonctions du temps
- c'est le même point de vue que la mécanique du point
- on connaît l'écoulement lorsque l'on connaît position $\vec{R}(t)$ et vitesse $\vec{V}(t)$ de chaque particule de fluide

Description eulérienne :

- on découpe le fluide en volumes élémentaires immobiles, chacun est donc un système ***ouvert***
- on associe un observateur à chacun de ces volumes, qui ***regarde fixement*** ce qui s'y trouve à l'instant t
- les coordonnées $\vec{r} = [x, y, z]$ représentent la position de ces volumes, et ***ne dépendent donc pas du temps***
- on connaît l'écoulement lorsque l'on connaît *le champ des vitesses* $\vec{v}(\vec{r}, t)$

La description lagrangienne est intuitive, et les lois de la mécanique sont connues dans le cas lagrangien.
La description eulérienne est plus pratique pour décrire les fluides expérimentalement et mathématiquement.
Par la suite, ***on écrira eulérien en pensant lagrangien*** !





1.2. Lien mathématique entre vitesse eulérienne et vitesse lagrangienne

En utilisant le concept de champ, la description eulérienne peut sembler un peu abstraite. Pour la rendre concrète, il suffit de pouvoir faire le lien avec la description lagrangienne, plus intuitive. Mathématiquement cela donne :

$$\vec{V}(t) = \vec{v}(\vec{R}(t), t)$$

Il suffit donc simplement d'évaluer le champ des vitesses à l'endroit où se trouve la particule de fluide pour en déduire la vitesse lagrangienne de cette dernière.

1.3. Trajectoire – Ligne de courant – Tube de courant

Définition de la trajectoire d'une particule de fluide *(lagrangien)*

C'est ***l'ensemble des positions occupées*** *successivement par la particule de fluide au cours du temps.*

C'est la même définition que dans le cas d'un point matériel.

Définition d'une ligne de courant *(eulérien)*

Définie à un instant t donné*, c'est la* ***courbe tangente*** *en chacun de ses points au* ***champ des vitesses****.*

C'est simplement une *ligne de champ* (cf. cours de magnétisme de PCSI) du champ des vitesses.
Etant données ces deux définitions, il n'y a aucune raison pour que trajectoire et ligne de courant puissent s'identifier. *Ce n'est vrai que dans le cas d'un écoulement stationnaire*.

Définition d'un tube de courant

Défini à un instant t donné*, c'est l'ensemble des* ***lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé****.*
D'une certaine manière, cela permet de définir des « ***conduites virtuelles*** *» au sein d'un écoulement.*

1.4. Remarque : distinguer vitesse du fluide et vitesse des molécules

Bien que l'on ne s'intéressera presque jamais à l'échelle microscopique, il convient de bien distinguer la vitesse du fluide (observable à l'échelle méso-macro) de la vitesse des molécules constitutives du fluide à l'échelle microscopique.

Lien entre vitesse du fluide et vitesse des molécules

La vitesse du fluide, définie sur un volume $d\tau$ à l'échelle mésoscopique,
est la ***moyenne statistique*** *des vitesses microscopiques des molécules situées dans le volume $d\tau$.*
Il est essentiel ***de ne pas confondre*** *cette vitesse moyenne et la vitesse d'une molécule considérée isolément.*

Concrètement : dans le cas d'un fluide en mouvement macroscopique, il est clair que la vitesse d'écoulement du fluide ***n'est pas du même ordre de grandeur*** que la vitesse des molécules à l'échelle microscopique :

- la première est de l'ordre du $m.s^{-1}$
- la seconde est dominée par l'agitation thermique, et de l'ordre de qq $100\ m.s^{-1}$ en se référant à la formule $\langle E_{c_{translation}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ du cours Gaz Parfait de PCSI

2. Dérivée particulaire d'un champ eulérien

2.1. Dérivée particulaire du champ de masse volumique (champ scalaire)

On s'intéresse à la variation temporelle de la masse volumique d'une particule de fluide (lagrangien), mais en l'écrivant en fonction du champ (eulérien) de masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$.

Définition de la dérivée particulaire

$$\frac{D\rho}{Dt} \overset{\text{def}}{=} \lim_{dt \to 0} \left(\frac{\rho\left(\vec{r} + \overrightarrow{dr}, t + dt\right) - \rho(\vec{r})}{dt} \right)$$

avec $d\vec{r} = \vec{v} dt$

❖ Réécrire cette définition en cartésien, et en déduire l'expression ci-dessous

Expression de la dérivée particulaire du champ de masse volumique $$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\rho$$

Remarque : Il est impératif de savoir exprimer *le nouvel opérateur* $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})$ en coordonnées cartésiennes.

2.2. Dérivée particulaire du champ des vitesses (champ vectoriel)

Définition du champ des accélérations $$\vec{a}(\vec{r},t) \overset{\text{def}}{=} \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

- ❖ Quelle information concrète sur le fluide (en lagrangien donc) nous donne le champ d'accélération ?

Expression de la dérivée particulaire du champ des vitesses $$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$$

Remarque : Le *nouvel opérateur* $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})$ n'est pas le même que précédemment, car il s'applique à un vecteur, et non plus à un scalaire. Il est impératif de savoir exprimer cet opérateur en coordonnées cartésiennes.

Remarque : Relation utile pour les prochaines chapitres, mais pas exigible :

$$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v})\wedge\vec{v}$$

2.3. Signification physique des différents termes

On parle de « ***dérivée particulaire*** » car la variation temporelle du paramètre considéré est étudiée *en lagrangien*, donc *du point de vue de la particule de fluide*. La notation $\boldsymbol{D/Dt}$ au lieu de d/dt rappelle simplement que cette variation temporelle est exprimée avec un champ eulérien (on « pense » lagrangien et on « écrit » eulérien).

Le terme $\boldsymbol{\partial/\partial t}$ est appelé « ***dérivée locale*** » car elle provient de la variation temporelle du champ eulérien toujours au même point (localement, sans suivre les particules de fluide)

Le terme $(\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{grad}})$ est appelé « ***dérivée convective*** » car elle provient du déplacement de la particule de fluide à travers un champ de vitesse inhomogène ('convection' = déplacement macroscopique de fluide).

- ❖ Savoir expliquer qualitativement la signification de ces deux termes d'accélération par analogie avec le transport de valises sur une succession de tapis roulants

3. Débit – Débit surfacique

3.1. Débit de masse à travers une surface – Flux de $\rho\vec{v}$

- ❖ Rappeler la définition du débit de masse, et du vecteur densité de courant associé
- ❖ Rappeler la relation entre le débit et la masse qui a traversé la surface pendant une durée $(t_2 - t_1)$
- ❖ Rappeler la relation entre le vecteur débit surfacique et le champ eulérien des vitesses
- ❖ Rappeler la signification d'un débit de masse négatif

3.2. Débit de volume à travers une surface – Flux de $\vec{v}$

Par analogie avec le transport de masse :
- ❖ Donner la définition du débit de volume, et du vecteur densité de courant associé
- ❖ Donner la relation entre le débit et le volume qui a traversé la surface pendant une durée $(t_2 - t_1)$
- ❖ Donner la relation entre le vecteur débit surfacique et le champ eulérien des vitesses

3.3. Tout débit est le flux d'une densité de courant

***Définition de la densité de courant** associé à un débit*

En physique, un débit peut toujours être écrit comme étant le flux d'un certain vecteur.
*Ce vecteur s'appelle **densité de courant**, et est noté $\vec{j}$:*

$$\boldsymbol{D\acute{e}bit} \overset{\text{def}}{=} \iint_{\boldsymbol{Surface}} \vec{\boldsymbol{j}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$$

Vocabulaire

- ▪ ***Un débit de « truc »** représente la quantité de « truc » qui traverse une surface par unité de temps (Unité : $\boldsymbol{truc.s^{-1}}$)*
- ▪ ***La densité de courant de « truc »** associée représente le **débit surfacique** (débit par unité de surface) (Unité : $\boldsymbol{truc.s^{-1}.m^{-2}}$)*

Lien entre débit surfacique et champ eulérien des vitesses

Un fluide en mouvement transporte de nombreuses grandeurs.
Les débits surfaciques associés à un grandeur « truc » s'écrivent :

$$\vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{truc}} = \boldsymbol{\rho_{truc}}\,\vec{\boldsymbol{v}}$$

4. Ecoulements stationnaires – Ecoulements incompressibles

4.1. Ecoulement stationnaire : conservation du débit de masse

- ❖ Rappeler la définition d'un écoulement stationnaire
- ❖ Rappeler la propriété d'un tel écoulement. L'écrire mathématiquement de deux façons différentes
- ❖ La notion de stationnarité est-elle « absolue » en mécanique, ou « relative » ?

4.2. Ecoulement incompressible : conservation du débit de volume

Définition écoulement incompressible

*Un **écoulement est incompressible** si le **volume d'une particule de fluide reste constant** au cours du mouvement :*

$$\boldsymbol{\frac{D\rho}{Dt} = 0}$$

Cette propriété est indépendante du référentiel.

Ne pas confondre « fluide incompressible » et « écoulement incompressible » :

- Fluide incompressible : son volume ne varie pas sous l'effet de la pression (ρ uniforme dans un fluide monophasé). Modélisation généralement adaptée aux liquides (pas toujours, cf. ondes sonores)

- Ecoulement incompressible : l'écoulement est « suffisamment lent » pour que le fluide ne soit pas comprimé. Modélisation plus générale, car aussi adaptée ***aux gaz*** *dont la* ***vitesse d'écoulement est très faible devant la célérité du son dans le gaz :*** $\boldsymbol{\frac{v^2}{c^2} \ll 1}$. C'est une ARQS mécanique…
  (Ex : écoulement d'air autour d'un train, d'une voiture).

Propriété : conservation du débit de volume le long d'un tube de courant
(équations intégrale, puis locale)

Soient deux sections quelconques S_1 et S_2 d'une conduite :

$$\boldsymbol{D_{V_1} = D_{V_2}}$$

$$\boldsymbol{div(\vec{v}) = 0}$$

C'est la loi des nœuds pour le transport de volume !
On dit aussi que $\boldsymbol{\vec{v}}$ ***est à flux conservatif*** *: son flux est le* **même en toute section** *d'une conduite.*

Corollaire : *le* ***rétrécissement du tube de courant*** *entraîne une* ***augmentation de la vitesse*** *de l'écoulement*

✪ Démontrer l'équation locale de la conservation du débit de volume, à partir de l'équation locale de conservation de la masse, et de la formule d'analyse vectorielle : $div(\rho\vec{v}) = \rho div(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(\rho)$ (ne pas la retenir). Puis en déduire la version intégrale, grâce au théorème de flux-divergence.

5. Ecoulements tourbillonnaires – Ecoulements potentiels

5.1. Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée

Courbe orientée

Soit une courbe Γ de l'espace 3D. C'est une figure géométrique unidimensionnelle, une « ligne » pas nécessairement rectiligne. Pour orienter cette courbe, et définir ainsi une *courbe orientée*, il faut se donner un *sens de parcours* le long de cette courbe.

Localement, en un point *M* sur cette courbe, le sens de parcours est donné par le vecteur *déplacement élémentaire* $\overrightarrow{d\ell}$: c'est un vecteur unitaire, localement tangent à la courbe au point *M*. Si l'on se donne un point *O* quelconque dans l'espace pour repérer la position du point *M* : $\overrightarrow{d\ell} = \overrightarrow{dOM}$. Ce vecteur représente le déplacement élémentaire du point *M* le long de cette courbe :

- sa direction est celle de la tangente à la courbe en *M*
- son sens défini le sens de parcours le long de la courbe

On choisit bien-sûr un sens de parcours identique tout le long de la courbe Γ.

Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée

Soit une courbe orientée Γ. Soit un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini en tout point de cette courbe.

Définition de la circulation élémentaire d'un champ vectoriel $\vec{V}$ en un point M d'une courbe orientée

$$\delta C \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

La circulation élémentaire du champ vectoriel au point *M* est un scalaire algébrique :

- si la composante du champ le long de la courbe est orientée dans le même sens que la courbe, la circulation élémentaire est positive ;
- sinon la circulation élémentaire est négative ;
- si le champ est localement orthogonal à la courbe, la circulation élémentaire est nulle.

Définition de la circulation *C* du champ $\vec{V}$ le long de la courbe orientée Γ

C'est la somme des circulations élémentaires le long de le courbe, *selon son sens d'orientation* :

$$\boldsymbol{C} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{V}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}}$$

Si la courbe orientée est une ***courbe fermée***, on note la circulation du champ :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{d\ell}$$

5.2. Orientation d'une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté

On sait orienter une surface et un contour fermé. Lorsque l'on considère une surface (ouverte) s'appuyant sur un contour fermé, on choisit conventionnellement ***d'associer les orientations du contour et de la surface***.

L'orientation d'une surface (ouverte) s'appuyant sur un contour fermé
est conventionnellement ***associée*** *à l'orientation du contour* **par la règle de la main droite.**

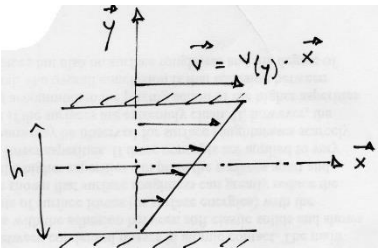
5.3. Interprétation du rotationnel : Théorème de circulation-rotationnel (Stokes)

Soit un ***contour fermé orienté*** (**Γ**). Soit ***S*** une surface quelconque ***s'appuyant sur ce contour***. La circulation d'un champ vectoriel sur le contour est directement reliée au flux du rotationnel de ce champ à travers la surface ***S***.

Théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{V}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{d\ell}} = \iint_{S} \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\mathbf{V}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

Ce théorème nous permet d'interpréter physiquement la signification du rotationnel d'un champ vectoriel. Connaissant le rotationnel en un point de l'espace, on peut dessiner en ce point une surface élémentaire orthogonale au rotationnel et en déduire la façon dont le champ $\vec{V}$ circule sur le contour de cette surface.



Exemple : Un écoulement de Couette est provoqué par la mise en mouvement d'une paroi entourant le fluide, ici la paroi supérieure. L'écoulement est décrit par un champ $\vec{v} = \frac{V_0}{h} y\, \overrightarrow{e_x}$ où V_0 est la vitesse de la paroi supérieure, la paroi inférieure étant immobile.

- ❖ Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ en un point de l'espace, et vérifier que la circulation du champ des vitesses autour de ce point concorde bien avec la direction et le sens du rotationnel

5.4. Ecoulement irrotationnel : existence d'un potentiel des vitesses

Définition écoulement irrotationnel

Un écoulement est **irrotationnel** *si* $\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\mathbf{0}}$ *en tout point.*
(Admis) Le caractère (ir)rotationnel de l'écoulement **dépend du référentiel**.

Propriété : existence d'un potentiel des vitesses

Il **existe un champ scalaire** $\boldsymbol{\psi}(\vec{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{t})$ *tel que :* $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{\psi})$.
Un **écoulement irrotationnel** *est donc aussi appelé* **écoulement potentiel**.

5.5. Ecoulement rotationnel : vecteur tourbillon

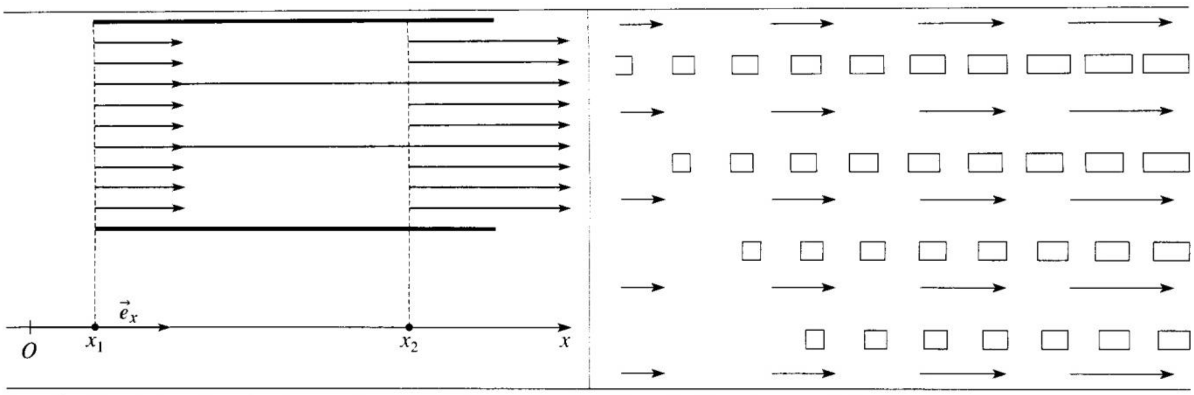
Un écoulement rotationnel est un écoulement ***tourbillonnaire***. Le vecteur tourbillon est définit par $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{v}})$. Dans des cas d'écoulements simples, on peut faire l'analogie avec le vecteur rotation de la mécanique du solide.

- Vérifier que cela est cohérent avec le dessin du champ des vitesse de Couette plan

5.6. Interprétation physique de $div(\vec{v})$

Un écoulement dans une tuyère peut être modélisé simplement par $\vec{v} = v_0\left(1+\frac{x}{L}\right)\overrightarrow{e_x}$. Le champ des vitesses et la visualisation de la dilatation d'une particule de fluide sont représentés ci-dessous.

- A t, on considère une particule de section S, dont la frontière gauche se situe en $x = 0$, et la frontière droite en $x = d$. Calculer en $t + dt$ le volume de cette particule.
- Calculer $div(\vec{v})$ en $x = 0$ et montrer qu'il est égal à l'accroissement relatif de volume de la particule, par unité de temps.

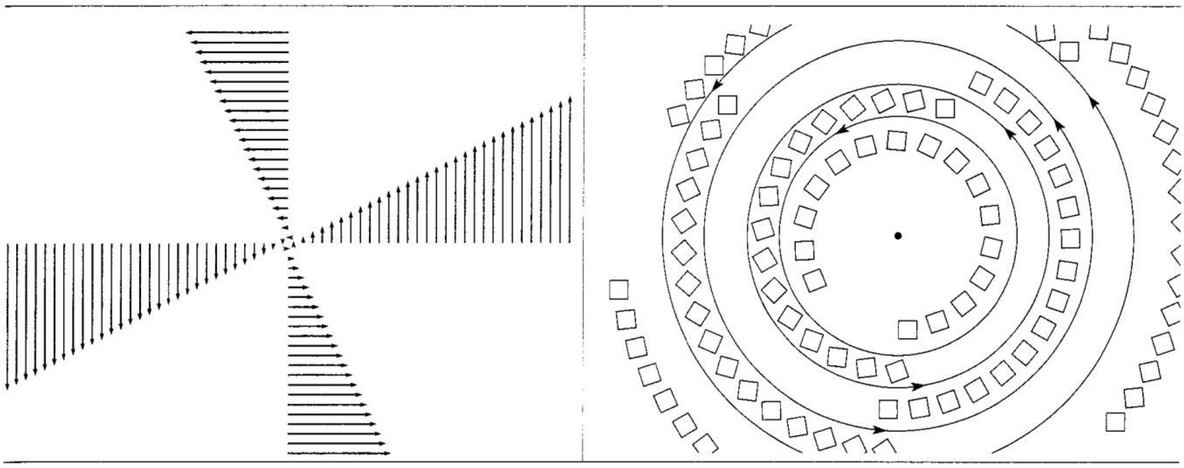


Doc. 2a. *Simulation d'un écoulement dans une tuyère.* **Doc. 2b.** *Visualisation de la dilatation d'une cellule.*

On retiendra que $\boldsymbol{div}(\vec{\boldsymbol{v}})$ est une *mesure de* ***l'accroissement relatif de volume*** *d'une particule de fluide, par unité de temps.*

5.7. Interprétation physique de $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$

Un écoulement dans l'œil d'une tornade peut être modélisé simplement par le champ des vitesses représenté ci-dessous : $\vec{v} = Ar\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées polaires. La rotation sur elle-même d'une particule de fluide est représentée.



Doc. 3a. *Visualisation du champ des vitesses d'un écoulement dans l'œil d'une tornade.* **Doc. 3b.** *Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement. La cellule « tourne » sans déformation.*

On retiendra que le vecteur tourbillon $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}(\vec{\boldsymbol{v}})$ ***mesure la rotation locale du fluide***.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1 Description d'un fluide en mouvement	
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.
Écoulement stationnaire.	Savoir que le caractère stationnaire dépend du référentiel.
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser son expression pour caractériser un écoulement incompressible. Savoir que le caractère incompressible ne dépend pas du référentiel.
Équation locale de conservation de la masse. Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Établir cette équation dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie. Utiliser div **v** =0 pour un écoulement incompressible.
Dérivée particulaire du vecteur-vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer d**v**/dt à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Connaître et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme (**v.grad**) **v.** Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de **grad** ($v^2/2$) et **rot v x v**.
Vecteur tourbillon. Écoulement irrotationnel défini par la nullité du rotationnel du champ des vitesses en tout point ; potentiel des vitesses.	Illustrer sur des exemples simples la signification qualitative du vecteur tourbillon. Utiliser **rot v = 0** pour un écoulement irrotationnel et en déduire l'existence d'un potentiel des vitesses. Savoir que le caractère irrotationnel dépend du référentiel.

c) rotationnel d) opérateur **b.grad**	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes. Exprimer la différentielle d'un champ de vecteurs à t fixé. Exprimer les composantes de (**b.grad**)**a** en coordonnées cartésiennes.