Annexe :
Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire, éléments de surface, élément de volume

Rappel : « élémentaire » en physique signifie « infiniment petit ».

Intro : On revient ici sur quelques notions fondamentales de PCSI concernant les trois systèmes de coordonnées. L'essentiel est de savoir exprimer de manière autonome :
- le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ d'un point M
- les surfaces élémentaires $\overrightarrow{dS}$
- les volumes élémentaires $d\tau$

1. Définitions préalables

1.1. Distinction entre « les composantes » et « les coordonnées » d'un vecteur

Les ***coordonnées*** d'un vecteur sont les trois nombres permettant de repérer la pointe du vecteur (point M sur les schémas ci-dessous) lorsque celui-ci est tracé à partir de l'origine O du repère :
- $M(x, y, z)$ en cartésien
- $M(r, \theta, z)$ en cylindrique
- $M(r, \theta, \varphi)$ en sphérique

Les ***composantes*** d'un vecteur sont les trois termes de la décomposition du vecteur dans la Base Orthogonale Normée Directe (BOND) :
- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$: le système cartésien est le seul pour lequel les projections des composantes (i.e. les coefficients devant les vecteurs unitaires) sont égales aux coordonnées
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$ en cylindrique : l'angle θ est « caché » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ en sphérique : les angles θ et φ sont « cachés » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$

1.2. Définition du déplacement élémentaire

Le vecteur $\overrightarrow{dOM}$ est défini comme étant le ***déplacement élémentaire*** du point M ***causé par les variations élémentaires de ses trois coordonnées***. L'expression des composantes de ce vecteur $\overrightarrow{dOM}$ en fonction des variations élémentaires des coordonnées (par exemple dx, dy, dz en cartésien) dépend du système de coordonnées (cf. ci-après).

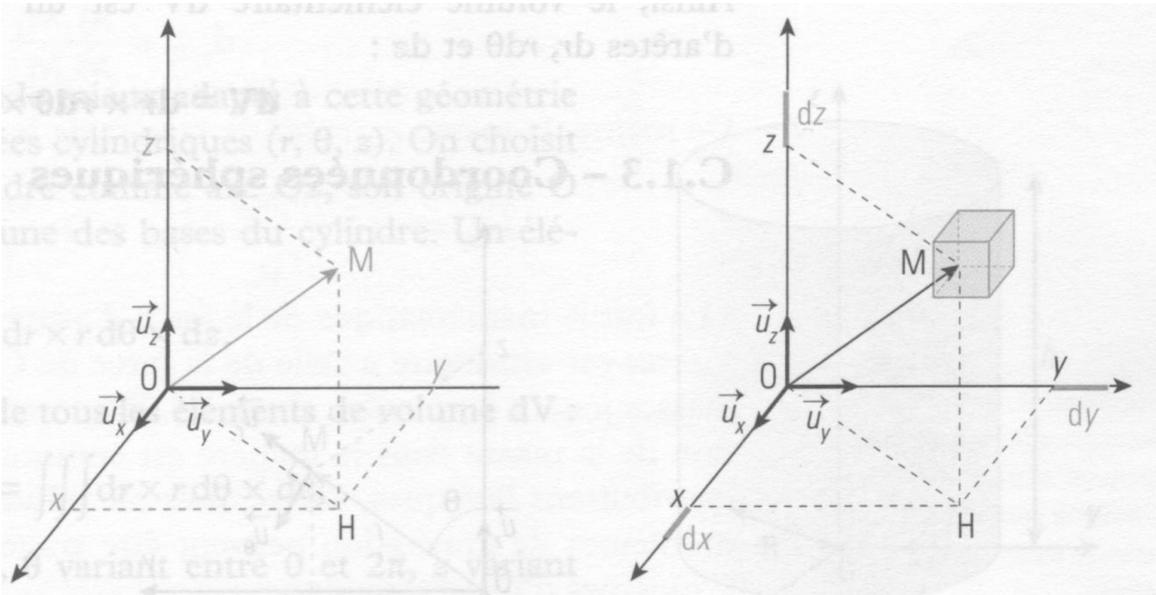
1.3. Surfaces élémentaires et volume élémentaire

Les *variations élémentaires des coordonnées* du point M ne définissent pas uniquement un déplacement élémentaire, mais aussi un volume élémentaire et six surfaces élémentaires.

On voit bien sur les schémas ci-dessous que les variations des coordonnées permettent de dessiner un volume associé : c'est ***le volume élémentaire***. Ce volume a 6 faces, qui sont les six ***surfaces élémentaires*** que l'on peut définir.

2. Expressions des quantités élémentaires dans les 3 systèmes de coordonnées

2.1. Coordonnées cartésiennes



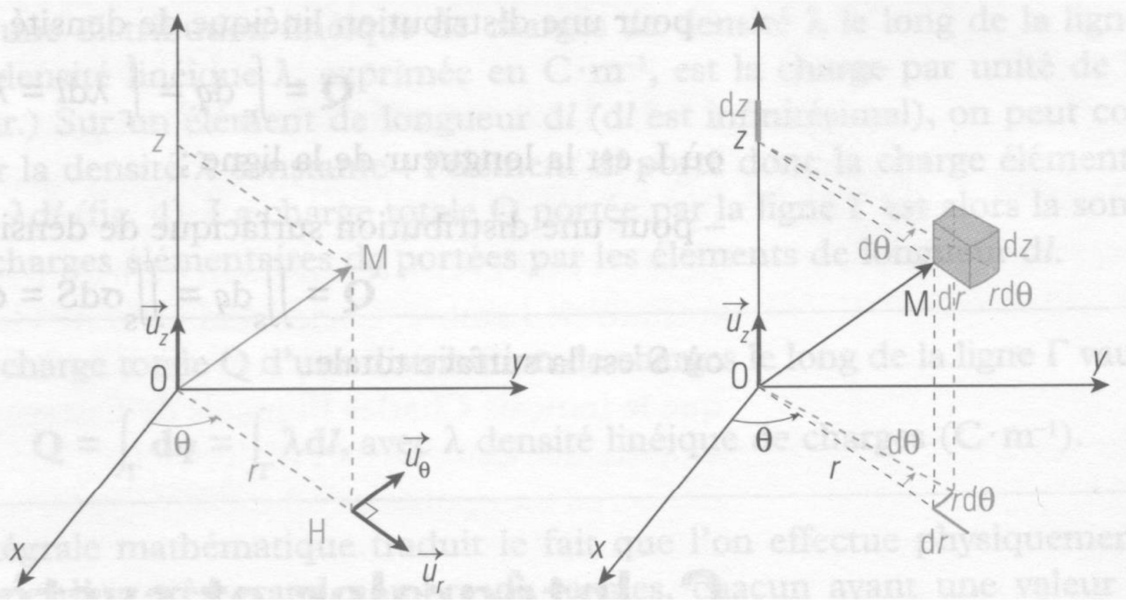
- Après un déplacement élémentaire, le point M se situe à la diagonale opposée du parallélépipède (ou cube) dessiné sur la figure de droite. En repérant le déplacement élémentaire sur le dessin, vérifier que l'on peut écrire :
$$\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

- Le volume élémentaires que l'on peut former à partir des déplacements élémentaires (figure de droite) est un parallélépipède (ou un cube). Déterminer son expression en fonction de dx, dy, dz.

- Exprimer les six surfaces élémentaires dS (faces du cube, on peut les noter dS_1, dS_2, etc. si l'on craint de les confondre) en fonction des composantes dx, dy, dz.

- Pour chaque face du cube, en se rappelant que $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal (*sortant du cube*), exprimer les vecteurs $\overrightarrow{dS}$ de chaque face en fonction de dx, dy, dz et $\overrightarrow{u_x},\ \overrightarrow{u_y},\ \overrightarrow{u_z}$.

2.2. Coordonnées cylindriques



Si les trois déplacements élémentaires avaient été assimilés localement à leur tangente (dessinés « au 1er ordre »), ils seraient rectilignes. En outre, la base étant orthogonale, les trois composantes du déplacement élémentaire seraient orthogonales entre elles. Le volume élémentaire engendré par les variations des coordonnées cylindrique serait alors un **CUBE**, et ses faces des **CARRES** (en fait, un parallélépipède et des rectangles, mais peu importe).

Pour plus de clarté sur les dessins ci-dessus, la courbure des déplacements élémentaires a été représentée (dessin à l'ordre 2). Mathématiquement, on se limite le plus souvent à l'ordre le plus bas non nul : il faut donc ici ***s'imaginer un CUBE et des faces CARREES***.

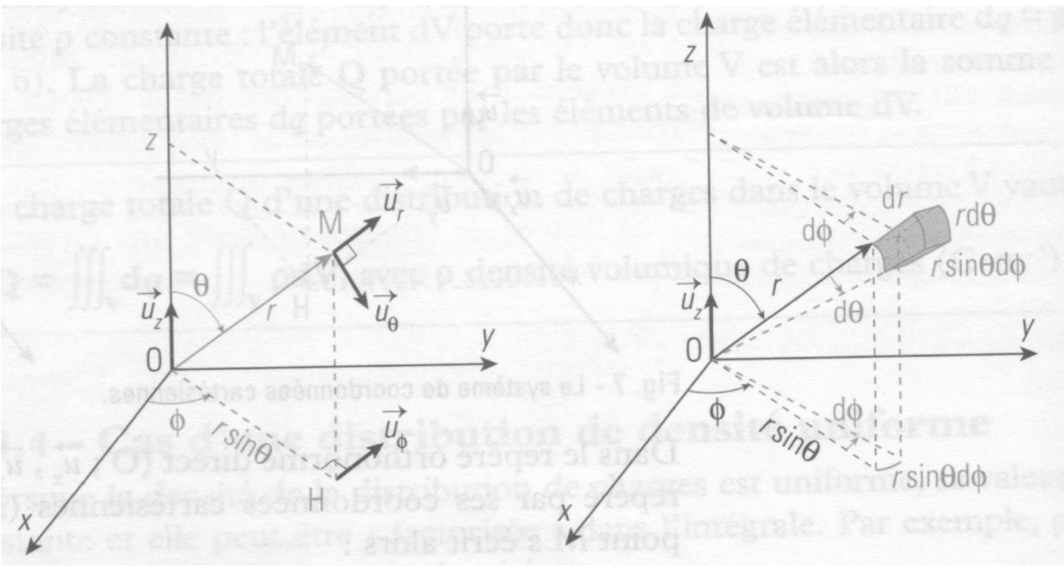
- ❖ En s'aidant du dessin, vérifier que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- ❖ Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires $\overrightarrow{dS}$ en fonction des projections $dx, rd\theta, dz$ du déplacement élémentaire, ainsi que des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$.

2.3. Coordonnées sphériques



- En vous aidant du dessin, vérifier que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

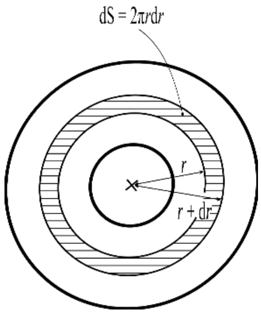
$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + rsin(\theta)d\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, rsin(\theta)d\varphi$ du déplacement élémentaire, ainsi que des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi}$.

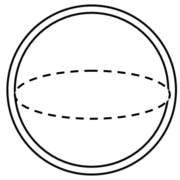
3. Quelques expressions après intégration (complète ou partielle)

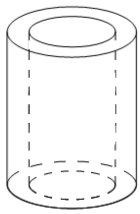
3.1. Surfaces et volumes infiniment petits d'ordre un



Considérons le cas d'un anneau 2D d'épaisseur infiniment petite (hachuré ci-contre). Sa surface est un infiniment petit d'ordre un, et non d'ordre deux comme les faces des cubes précédents, car cet anneau a été obtenu en intégrant (en sommant) selon θ les surfaces élémentaires $dr \times rd\theta$. On peut d'ailleurs calculer rigoureusement son expression de deux manières différentes : par intégration, ou par développement limité de la différence de l'aire de deux disques (on le fera ensemble).

<u>Moyen mnémotechnique</u> (= recette)
*Il suffit de **multiplier** le périmètre **par l'épaisseur élémentaire** pour obtenir la surface élémentaire.*
*Il suffit de **multiplier** la surface **par l'épaisseur élémentaire** pour obtenir le volume élémentaire.*





- Grâce à cette recette, proposer une expression de la surface de l'anneau
- Idem pour une expression du volume élémentaire de la coquille sphérique ci-contre
- Idem dans le cas de l'anneau cylindrique 3D ci-contre

3.2. (Complément) Démonstration par intégration des surfaces et volumes usuels

En intégrant les expressions des surfaces et volumes élémentaires, il est possible de démontrer les expressions :

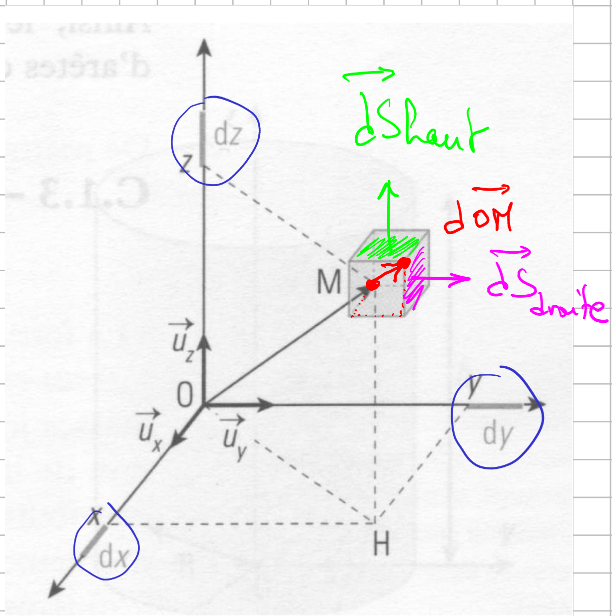
- des surfaces suivantes : disque, sphère, face latérale cylindre
- des volumes suivants : cylindre, sphère

4. Comment retenir tout cela par cœur ?

Pour chaque système de coordonnées, il suffit :

- de connaître ***par cœur les composantes de*** $\overrightarrow{\boldsymbol{dOM}}$ (seul le cas sphérique est « compliqué »)
- d'en ***déduire l'expression des trois surfaces*** élémentaires $\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$ (ex : face haut du cube en cylindrique)
  - on repère le vecteur de base orthogonal à la surface ($\overrightarrow{u_z}$ avec l'exemple choisi)
  - dS est alors le produit des déplacements selon les deux autres vecteurs de base ($dr \times rd\theta$)
- d'en ***déduire l'expression du volume*** élémentaire $\boldsymbol{d\tau}$ (un cube au 1er ordre) : c'est simplement le produit des trois composantes du déplacement élémentaire

Annexe systèmes de coordonnées

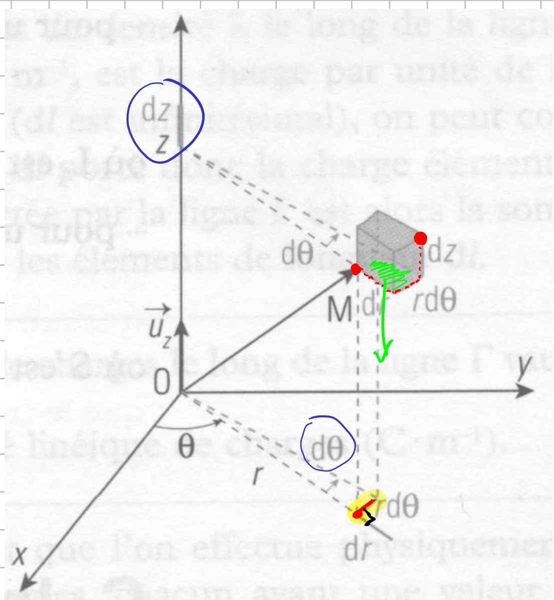


$$\vec{dOM} \overset{\text{déf}}{=} \vec{OM}_{final} - \vec{OM}_{initial}$$

$$\vec{dS} = dS\,\vec{n}$$

$$\boxed{d\tau = dx\,dy\,dz}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{dS}_{haut} &= dx\,dy\,\vec{u_z}\\ \vec{dS}_{droite} &= dx\,dz\,\vec{u_y}\end{aligned}\right\}\text{moyen mnémotechnique}$$



Rappel : déf° angle α

R

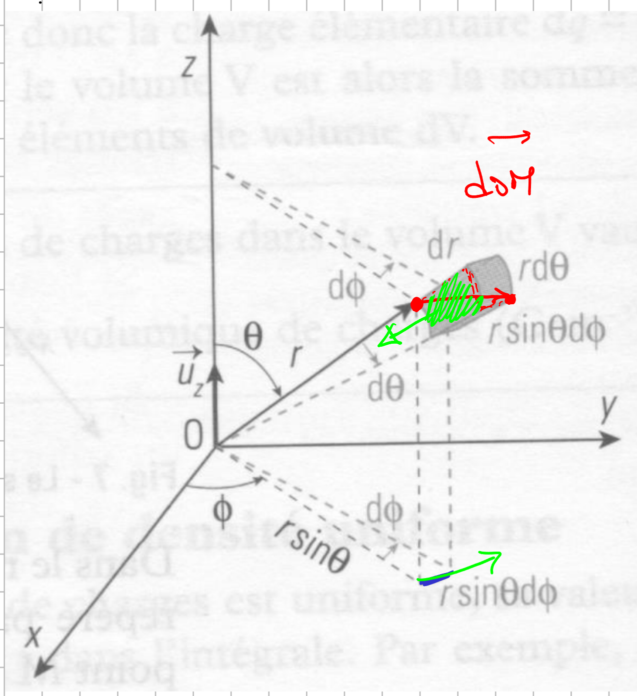
$\ell = R \times \alpha$

$$\alpha \overset{\text{déf}}{=} \frac{\ell}{R}$$

$$\boxed{\vec{dOM} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dz\,\vec{u_z}}$$

$$d\tau = dr \times r\,d\theta \times dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

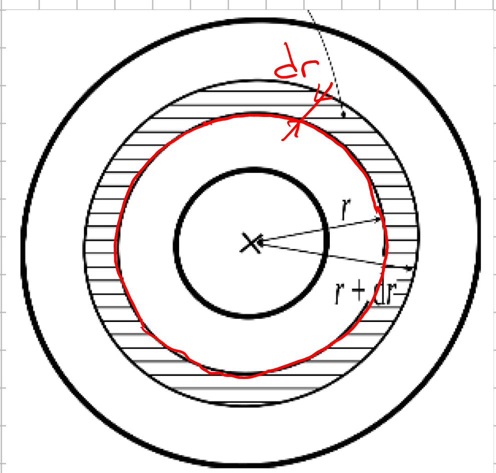
$$\vec{dS}_{bas} = dr \times r\,d\theta\,(-\vec{u_z})$$
$$= -r\,dr\,d\theta\,\vec{u_z}$$

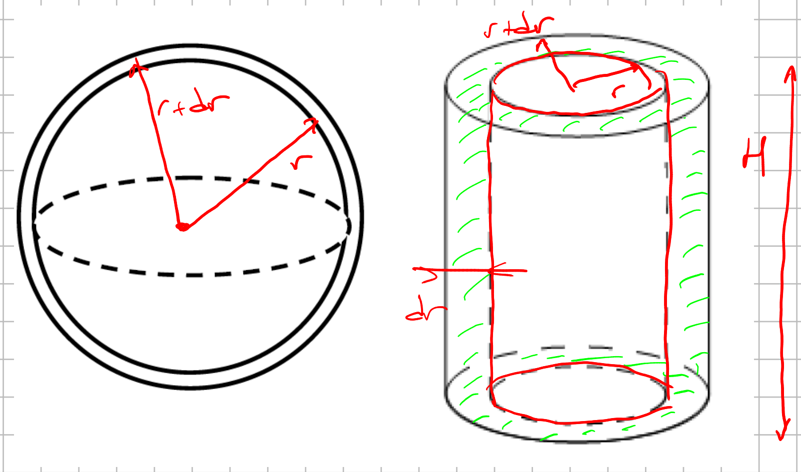


$$\boxed{\vec{dOM} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{u_\phi}}$$

$$d\tau = dr \times r\,d\theta \times r\sin\theta\,d\phi$$

$$\vec{dS} = dr \times r\,d\theta\,(-\vec{u_\phi}) = -r\,dr\,d\theta\,\vec{u_\phi}$$





$$dS = 2\pi r \times dr$$

$$dS = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2\left(1+\frac{dr}{r}\right)^2 - \pi r^2 = \pi r^2\left(1+2\frac{dr}{r}\right) - \pi r^2 = 2\pi r\,dr.$$

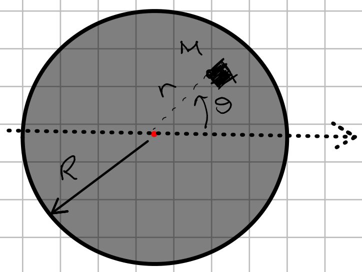
$$d\tau = 4\pi r^2 \times dr$$

$$d\tau = \frac{4}{3}\pi\left[(r+dr)^3 - r^3\right]$$

$$d\tau = 2\pi r H \times dr$$

$$(\text{Vol cyl} : \pi r^2 H)$$

3.2. (Hors programme) Exp° vol. et surface via calcul intégral

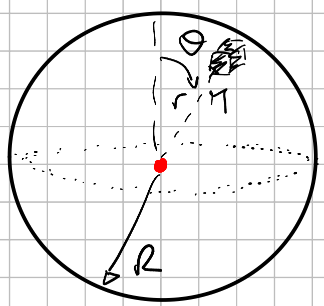


$$dS = dr \times r d\theta$$

$$S_{tot} = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{2\pi} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\, d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^R r\,dr}_{\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = \pi R^2.$$

$\hookrightarrow \frac{R^2}{2}$



$$V_{tot} = \iiint_{sph} d\tau = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dr \times r d\theta \times r \sin\theta\, d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R} \times \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$