

Electromagnétisme Chap.6 – Magnétostatique – Théorème d'Ampère

1. Particularisation des équations de Maxwell en statique

- 1.1. (*Rappels*) Forces de Lorentz – Force de Laplace
- 1.2. Equations de M.T. et M.A. en régime stationnaire
- 1.3. Les différentes modélisations possibles de la répartition du courant

2. Topographie du champ magnétostatique

- 2.1. Le champ magnétique est à flux conservatif
- 2.2. Les lignes de champ s'enroulent autour des courants : règle de la main droite

3. Conséquences des symétries et invariances sur le champ magnétostatique

- 3.1. Invariance, symétrie et antisymétrie plane d'une distribution de courant
- 3.2. Propriétés du champ magnétostatique vis-à-vis des (anti)symétries planes

4. Circulation du champ magnétostatique – Théorème d'Ampère

- 4.1. (*Rappel*) Orientation d'une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté
- 4.2. Enoncé du Théorème d'Ampère

5. Exemples de calculs du champ à l'aide du Théorème d'Ampère

- 5.1. Méthodes pour calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace
- 5.2. Champ créé par un fil rectiligne infini
- 5.3. Cylindre rectiligne infiniment long parcouru par un courant volumique uniforme
- 5.4. Champ créé par un solénoïde infini
- 5.5. Champ créé par une bobine torique
- 5.6. (*Complément*) Nappe de courant plane infinie

6. (HProgramme culturel) Expressions intégrales du champ magnétostatique

Intro : L'expérience montre qu'un courant électrique *génère une force magnétique*, qui s'exerce sur une particule chargée en mouvement au voisinage du dispositif où circule le courant (force de Lorentz). Cette force s'exprime en fonction d'un champ vectoriel : *le champ magnétique*. Ce champ magnétique peut aussi être généré par un aimant. Cette source de champ sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Le *courant* électrique est donc la source d'un champ *magnétique*, au même titre que la *charge* électrique est la source d'un champ *électrique*. Si les courants sont permanents (indépendants du temps), le champ est également indépendant du temps, il est alors qualifié de *magnétostatique*.

L'objectif est alors de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant. Dans les cas simples au programme, on utilisera la méthode du *Théorème d'Ampère*, analogue à celle du Théorème de Gauss pour le champ électrostatique.

1. Particularisation des équations de Maxwell en statique

1.1. (Rappels) Forces de Lorentz – Force de Laplace

On rappelle ici que la définition du champ magnétique est donnée à partir de la force associée : la force de Lorentz (sa composante magnétique) qui s'applique à une particule chargée en mouvement. On rappelle que la force magnétique ne travaille pas et ne fait que courber la trajectoire des particules chargées.

On ne confondra pas la force de Lorentz avec **la force de Laplace** qui ne s'applique pas aux mêmes types de systèmes.

Un conducteur traversé par un courant est soumis, en présence d'un champ magnétique, à la force de Laplace.

Un volume élémentaire $d\tau$ est soumis à la force élémentaire :

$$\vec{dF} = \vec{j}d\tau \wedge \vec{B}$$

Une portion $d\ell$ d'un circuit filiforme est soumise à la force élémentaire :

$$\vec{dF} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Pour avoir la force de Laplace totale appliquée à un morceau de conducteur, il suffit alors d'intégrer selon le volume du conducteur (modélisation volumique), ou selon la longueur de circuit considéré (modélisation linéique, circuits filiformes).

Remarque : On notera que la force de Laplace est la résultante des forces électrique et magnétique appliquées au conducteur tout entier : forces appliquées aux porteurs de charge mobiles + celles appliquées aux ions du réseau.

1.2. Equations de M.T. et M.A. en régime stationnaire

- ❖ Rappeler les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Ampère, et les particulariser au cas stationnaire
- ❖ Montrer que la seule source de champ magnétique est la densité de courant

1.3. Les différentes modélisations possibles de la répartition du courant

La modélisation continue la plus générale de la répartition du courant est la **distribution volumique $\vec{j}(\mathbf{M})$** . C'est celle qui apparaît dans les équations de Maxwell (modélisation 3D).

Si la zone de l'espace où circule le courant possède une dimension très petite devant les deux autres, on peut considérer que le courant circule sur une surface : on parle de **distribution surfacique de courant $\vec{j}_S$** . C'est celle qui apparaît dans les relations de passage (2D).

Si la zone de l'espace où s'écoule le courant possède deux dimensions très petites devant la troisième, on peut considérer que le courant s'écoule le long d'une ligne : on parle de **distribution linéique de courant I** . C'est la modélisation que l'on a toujours utilisée en électrocinétique.

2. Topographie du champ magnétostatique

2.1. Le champ magnétique est à flux conservatif

Evasement des tubes de champ = Affaiblissement du champ

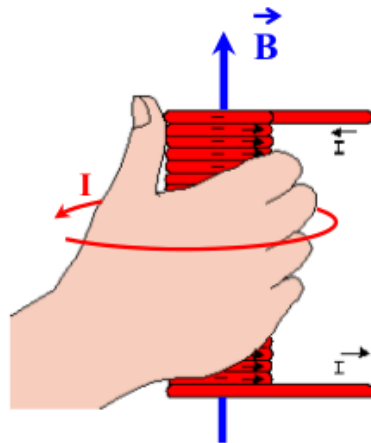
*D'après Maxwell-Thomson, le champ magnétique est à **flux conservatif**.
L'évasement d'un tube de champ reflète alors la **diminution** de la norme du champ.*

2.2. Les lignes de champ s'enroulent autour des courants : règle de la main droite

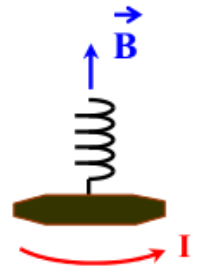
Contrairement au champ électrique, le champ magnétique *n'est pas* irrotationnel. On ne peut donc pas définir de potentiel scalaire associé. En régime stationnaire, son rotationnel est même directement relié aux courants qui lui donnent naissance. Cela implique deux conséquences topographiques importantes :

*Le champ magnétostatique tend à s'enrouler autour des lignes de courant qui le génèrent.
Le sens et la direction du champ se retrouvent grâce à la **règle de la main droite** (ou règle du tire-bouchon)*

On remarque que cette règle associe une direction à un sens de rotation. C'est la même qui permet d'orienter de manière cohérente un contour fermé et les surfaces qui s'appuie dessus (cf. Théorème de Stokes).



Règle de la main droite

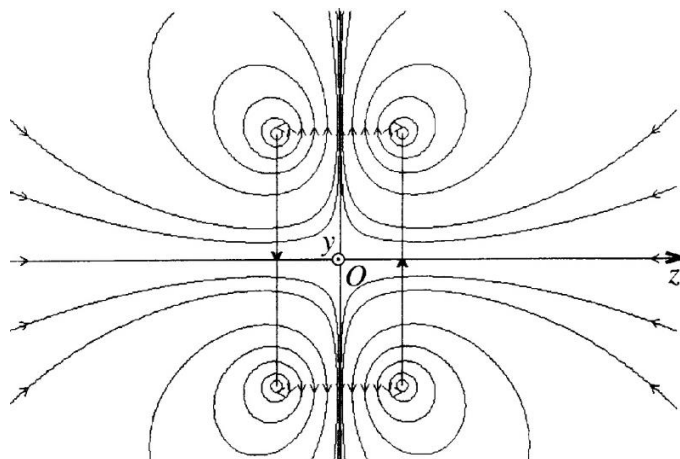
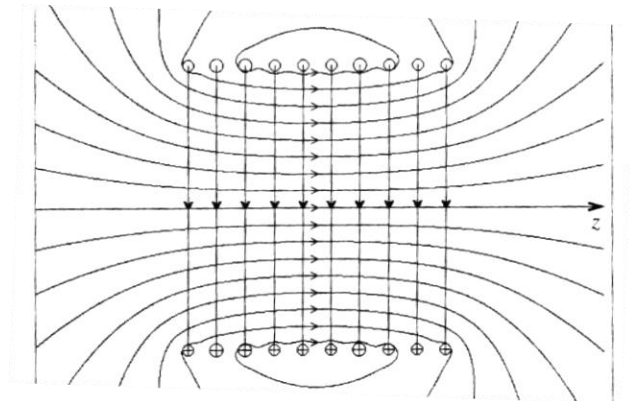
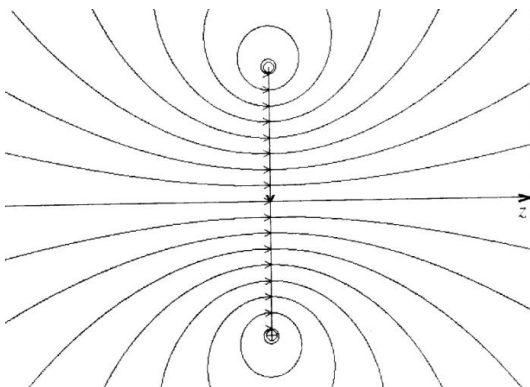


Règle du tire-bouchon

Similarités et différences avec le champ électrostatique :

- Similarité : deux lignes de champ ne peuvent pas se couper, sauf en un point de champ nul, ou en un point où le champ n'est pas défini
- Différence : les lignes de champ s'enroulent autour des sources (au lieu d'en diverger ou d'y converger)

Quelques exemples de cartes de champ



3. Conséquences des symétries et invariances sur le champ magnétostatique

3.1. Invariance, symétrie et antisymétrie plane d'une distribution de courant

Une distribution de courant peut être invariante par translation selon un axe, ou par rotation autour d'un axe

Une distribution de courant possède un **plan de symétrie**, si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution, et si $\vec{j}(P') = \text{sym}[\vec{j}(P)]$.

Une distribution de courant possède un **plan d'antisymétrie**, si tout point P de la distribution a une image P' appartenant à la distribution, et si $\vec{j}(P') = -\text{sym}[\vec{j}(P)]$.

3.2. Propriétés du champ magnétostatique vis-à-vis des (anti)symétries planes

De manière similaire au champ électrostatique, le champ magnétostatique possède les mêmes invariances que la distribution de courant qui le génère. Repérer ces invariances permet de préciser la *dépendance du champ avec les coordonnées du point M où on le calcule*.

Concernant les symétries et antisymétries planes, les propriétés du champ magnétostatique sont **inversées** par rapport à celle du champ électrostatique. On qualifie le champ magnétique de **vecteur axial** (ou pseudo-vecteur).

Propriété du champ $\vec{B}$ vis-à-vis des plans de symétrie Π

$$M' = \text{sym}_{\Pi}[M] \Rightarrow \vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi}[\vec{B}(M)]$$

Corollaire

$$M \in \Pi \Rightarrow \vec{B}(M) \text{ est orthogonal au plan de symétrie } \Pi$$

Propriété du champ $\vec{B}$ vis-à-vis des plans d'antisymétrie Π_a

$$M' = \text{sym}_{\Pi_a}[M] \Rightarrow \vec{B}(M') = \text{sym}_{\Pi_a}[\vec{B}(M)]$$

Corollaire

$$M \in \Pi_a \Rightarrow \vec{B}(M) \text{ appartient au plan d'antisymétrie } \Pi_a$$

On constatera la validité de ces affirmations sur les trois cartes de champ données précédemment. On admettra leur généralisation à des distributions quelconques.

4. Circulation du champ magnétostatique – Théorème d'Ampère

4.1. (Rappel) Orientation d'une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté

On sait orienter une surface et un contour fermé. Lorsque l'on considère une surface (ouverte) s'appuyant sur un contour fermé, on choisit conventionnellement **d'associer les orientations du contour et de la surface**.

*L'orientation d'une surface (ouverte) s'appuyant sur un contour fermé est conventionnellement **associée** à l'orientation du contour **par la règle de la main droite** (ou du tire-bouchon).*

4.2. Enoncé du Théorème d'Ampère

Théorème d'Ampère

La **circulation** du champ magnétostatique sur un **contour fermé orienté** Γ est reliée à l'**intensité totale** $\sum I_{\text{enlacé}}$ traversant toute **surface orientée** s'appuyant sur le contour :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

Dans cette formule les intensités $I_{\text{enlacé}}$ sont **orientées dans le même sens que la surface**.
Pour les **intensités orientées dans le sens inverse**, il faut **ajouter un signe -** au terme correspondant.

La constante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la **perméabilité du vide**.

❖ Démontrer ce théorème à partir de l'équation de M.A. et du théorème de Stokes

Commentaires :

- avant d'appliquer le Théorème d'Ampère, il faut repérer un contour, l'orienter, puis repérer une surface s'appuyant sur le contour, et l'orienter grâce à la règle de la main droite
- le choix de la surface n'a pas d'influence sur le décompte des « intensités enlacées par le contour ». On choisira toujours la surface la plus simple
- S'il existe des courants volumiques enlacés par le contour, l'intensité « enlacée » correspondante s'écrit :

$$I_{\text{enlacé}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où S est la surface considérée s'appuyant sur le contour (orientée selon la règle de la main droite)

Le Théorème d'Ampère est au champ magnétostatique ce que le Théorème de Gauss est au champ électrostatique : un outil puissant pour déterminer le champ créé par des distributions hautement symétriques.

5. Exemples de calculs du champ à l'aide du Théorème d'Ampère

5.1. Méthodes pour calculer le champ magnétostatique en tout point de l'espace

On cherchera généralement à déterminer l'expression du champ magnétostatique en un point M quelconque de l'espace où il est défini.

Méthode théorème d'Ampère (la seule au programme)

1. Repérer les **invariances** de la distribution de courant, source du champ, pour déterminer la **dépendance** du champ par rapport aux **coordonnées** du point M . Il faut définir au préalable un système de coordonnées approprié aux symétries de la distribution de courant.
2. Repérer les **symétries** (ou antisymétries) planes de la distribution de courant, source du champ, pour déterminer la **direction** du champ magnétique au point M . Ces plans doivent contenir le point M .
3. Définir un « **contour d'Ampère** », passant par le point M , et sur lequel le champ est **tangent et uniforme** (si possible), ou éventuellement **orthogonal au contour sur une partie**. Il faut généralement distinguer plusieurs cas, selon la région de l'espace où se situe le point M (à l'intérieur / à l'extérieur de la distribution par ex.)
4. Appliquer alors le **Théorème d'Ampère**. Grâce aux étapes précédentes, le calcul de la circulation est généralement très simple si la distribution de courant est « hautement symétrique ».

5.2. Champ créé par un fil rectiligne infini

- ❖ Appliquer le Théorème d'Ampère pour déterminer le champ créé par un fil rectiligne infini.

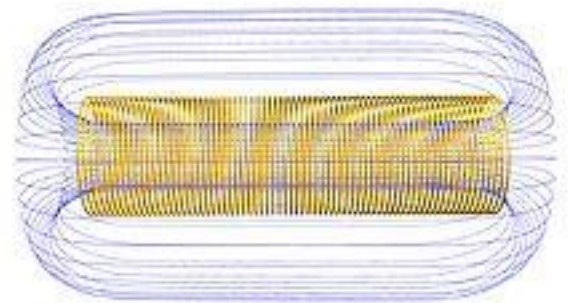
5.3. Cylindre rectiligne infiniment long parcouru par un courant volumique uniforme

- ❖ Déterminer le champ créé en tout point de l'espace.

5.4. Champ créé par un solénoïde infini

Le solénoïde est caractérisé par sa « densité linéique de spires » : le nombre de spires par mètre n . On négligera les espaces entre les fils et on admet que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde.

- ❖ D'après la carte de champ ci-contre (solénoïde de longueur finie), quel argument permet de supposer que le champ est nul à l'extérieur quand la longueur tend vers l'infini ?
- ❖ Déterminer le champ en tout point intérieur au solénoïde



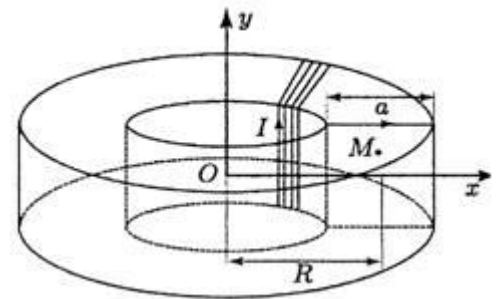
5.5. Champ créé par une bobine torique

Un tore est une forme géométrique symétrique par rapport à un axe (Oy), et définie de la manière suivante. Un contour est dessiné dans le plan contenant l'axe (Oy). Sa rotation complète autour de (Oy) engendre un tore.

Si le contour est un cercle, le tore obtenu est à section circulaire. Si le contour est un rectangle, le tore obtenu est à section rectangulaire.

On considère la bobine torique ci-contre, constituée par un ensemble de spires rectangulaires jointives parcourues par un courant I , chacune étant enroulée selon une section du tore.

- ❖ Exprimer le champ créé en tout point de l'espace, en fonction de I et du nombre total de spires N



5.6. (Complément) Nappe de courant plane infinie

- ❖ Déterminer le champ créé par une nappe parcourue par un courant surfacique uniforme $\vec{j}_S$.

6. (HProgramme culturel) Expressions intégrales du champ magnétostatique

Comme pour le champ électrostatique, il existe des expressions intégrales reliant directement le champ magnétique à la distribution de courant qui lui donne naissance. C'est la **loi de Biot et Savart**.

Modélisation 3D puis 1D ($\vec{d\ell}$ est alors une portion élémentaire du fil) :

$$\vec{B}(M) = \int_{P \in D} \frac{\mu_0 \vec{j} \wedge \vec{u}_{PM}}{4\pi PM^2}$$
$$\vec{B}(M) = \int_{P \in D} \frac{\mu_0 I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}_{PM}}{4\pi PM^2}$$

Cette formule est particulièrement utile pour déterminer numériquement par ordinateur les champs créés par des distributions de courant quelconques.

Le bloc 1 présente les relations de symétrie entre les champs E , B et les sources, sans recourir à des expressions reliant les champs aux sources, mais en s'appuyant sur des exemples de cartes de champs.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Symétries des champs électrique et magnétique	
Symétries pour le champ E , caractère polaire de E .	Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges et de courants pour en déduire les propriétés de E , B .
Symétries pour le champ B , caractère axial de B .	

Le bloc 4 introduit les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson comme des postulats de l'électromagnétisme. La conservation du flux de B , qui est la traduction intégrale de l'équation de Maxwell-Thomson, est l'occasion de revenir sur les connaissances de première année, où le champ magnétique a été abordé de manière descriptive. Les seuls calculs exigibles de champs magnétiques doivent pouvoir être traités par le théorème d'Ampère, la loi de Biot et Savart et le potentiel vecteur sont hors programme. L'expression de la densité volumique d'énergie magnétique est établie sur le cas particulier d'une bobine longue, sa généralité est admise. Les distributions surfaciques de courant ne seront pas introduites à ce stade, leur usage étant strictement limité à l'étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal parfait.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Champ magnétique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.	Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson. Particulariser l'équation de Maxwell-Ampère au régime stationnaire.
Conservation du flux magnétique.	Exploiter la conservation du flux magnétique et ses conséquences sur les lignes de champ magnétique.
Théorème d'Ampère.	Énoncer et appliquer le théorème d'Ampère.

	Établir l'expression du champ magnétique créé par : – un fil infini ; – un fil épais et infini ; – un solénoïde infini en admettant que le champ extérieur est nul ; – une bobine torique.
Forces de Laplace.	Exprimer les forces de Laplace s'exerçant sur un conducteur filiforme, sur une distribution volumique de courant.