

# Exercices – Réflexion et transmission à une interface

## Exercice 1 : Réflexion en bout de câble coaxial

Expression des conditions aux limites dans le cas du câble

Analogies avec la corde et les ondes sonores

Justification des éléments admis en TP

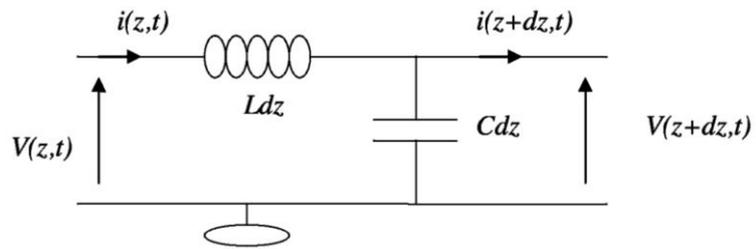


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

Rappel des équations de couplage

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}$$

Impédance caractéristique du câble

1. En réinjectant une OPPH se propageant vers la droite dans les équations de couplage, établir l'expression de l'impédance caractéristique du câble  $Z_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u}{i}$
2. Montrer que l'impédance change de signe pour une OPPH progressant vers la gauche
3. Vérifier l'homogénéité de l'expression de l'impédance

Coefficient de réflexion en bout de câble

On étudie un câble branché à un GBF en  $z = -L$ . On étudie la réflexion de l'ondes à son extrémité droite en  $z = 0$ .

4. Donner l'écriture mathématique de l'OPH incidente  $u_i(z, t)$  de pulsation  $\omega$ , puis l'écrire en complexe
5. Faire de même pour l'OPH réfléchie  $u_r(z, t)$ , supposée de même pulsation
6. Donner l'expression complexe de l'onde totale  $u(z, t)$  en un point  $z$  de la ligne
7. Faire de même pour l'onde totale  $i(z, t)$  en utilisant  $Z_c$

On branche une résistance  $R = 0$  au bout du câble en  $z = 0$ .

8. Exprimer la condition à la limite  $z = 0$

9. En déduire que :

- le coefficient de réflexion en bout de ligne  $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_r(0,t)}{u_i(0,t)}$  vaut  $-1$
- l'onde  $u(z, t)$  est une onde stationnaire

10. Montrer que l'onde en courant  $i(z, t)$  est aussi stationnaire, en quadrature spatiale avec l'onde en tension

11. Calculer la puissance moyenne reçue à l'entrée de la tranche  $[z, z + dz]$ . Interpréter physiquement.

12. Quelle serait la situation analogue dans le cas de la corde vibrante ? et pour les ondes sonores dans les fluides ?

On branche une résistance  $R \rightarrow +\infty$  au bout du câble en  $z = 0$ .

12. Exprimer la condition à la limite  $z = 0$

13. En déduire que le coefficient de réflexion en bout de ligne  $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_r(0,t)}{u_i(0,t)}$  vaut  $+1$

On pourrait montrer de même que les ondes en tension et en courant sont encore stationnaires, et en quadrature de phase l'une avec l'autre. La puissance reçue en entrée d'une tranche est toujours nulle,  $\forall z$

14. Quelle serait la situation analogue dans le cas de la corde vibrante ? et pour les ondes sonores dans les fluides ?

On branche une résistance  $R$  quelconque au bout du câble en  $z = 0$ .

15. Exprimer la condition à la limite  $z = 0$

16. En déduire que le coefficient de réflexion en bout de ligne  $\underline{r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_r(0,t)}{u_i(0,t)}$  vaut  $\frac{R-Z_c}{R+Z_c}$

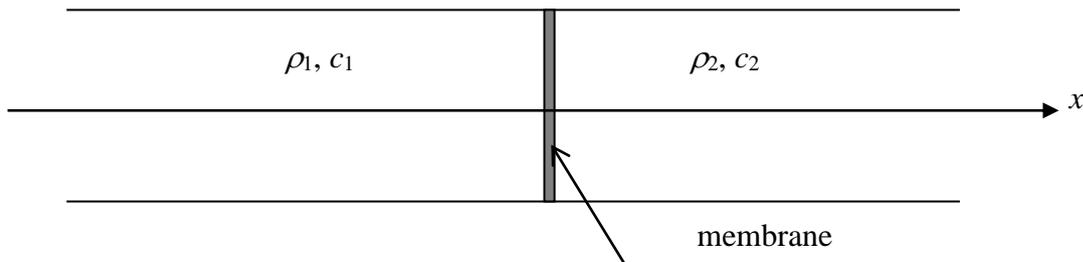
17. En déduire qu'il y a adaptation d'impédance pour  $R = Z_c$  : il n'y a pas d'onde réfléchie. Ainsi toute la puissance électrique émise par le GBF est transmise à la résistance  $R$ .

## Exercice 2 : Réflexion sur une membrane

Interface matérielle entre deux fluides, la membrane modifie la condition à la limite sur la surpression

Une membrane, de masse surfacique  $\sigma$ , est infiniment mince, elle est située en  $x = 0$ . Elle peut coulisser sans frottement dans le tuyau horizontal et sépare deux fluides parfaits. On note  $\rho_i$  et  $c_i$  la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans chacun des deux demi tuyaux ( $i = 1$  ou  $2$ ). Une onde incidente plane progressive harmonique de pulsation  $\omega$  arrive sur la membrane, elle est décrite par la surpression acoustique  $\underline{p}_i(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - k_i x)}$ . Le tuyau est supposé illimité.

$Z_i$  est l'impédance acoustique d'une OPP dans le sens des  $x$  croissants dans le milieu  $i$ , définie par  $Z = \frac{p(x, t)}{\underline{u}(x, t)}$  où  $\underline{u}$  est la vitesse du fluide.



1. En utilisant la définition des coefficients de réflexion  $\underline{r}$  et de transmission  $\underline{t}$  concernant les amplitudes de pression de l'onde réfléchi et de l'onde transmise, écrire les ondes réfléchies et transmises en surpression.

2. Justifier que la vitesse de l'onde en  $x = 0$  est continue. En utilisant la notion d'impédance, en déduire une relation entre  $\underline{r}$  et  $\underline{t}$ .

3.1. Donner la relation entre la vitesse de la paroi et la vitesse de l'onde totale dans le milieu 1.

3.2. En supposant très faible le déplacement de la membrane autour de sa position d'équilibre (cela revient à négliger ce déplacement vis-à-vis de la longueur d'onde), appliquer le principe fondamental de la dynamique à la membrane et en déduire une autre relation.

4. En déduire que  $\underline{t} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2 + j\sigma\omega}$  et que  $\underline{r} = \frac{Z_2 - Z_1 + j\sigma\omega}{Z_1 + Z_2 + j\sigma\omega}$

5. Les milieux de part et d'autre de la membrane sont identiques, donner les coefficients de transmission et de réflexion dans ce cas. Examiner les cas limites d'une masse surfacique très faible, et d'une masse surfacique très grande. Interprétation.

**Exercice 3 : Effet Doppler (adapté E3A PSI Modélisation 2016)**  
 Démonstration de l'effet Doppler avec le formalisme des ondes

Le sujet complet traite d'un robot qui doit pouvoir se déplacer de manière autonome dans une maison. Il émet ondes ultrasonores pour repérer d'éventuels obstacles.

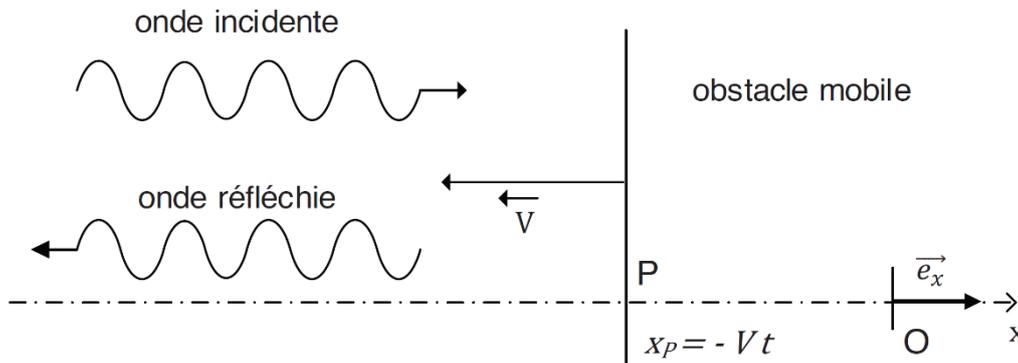
On étudie, dans cette partie, la réflexion d'une onde ultrasonore sur un obstacle (ou paroi) assimilé à une interface plane, imperméable, perpendiculaire à la direction de propagation.

L'obstacle se déplace en direction de l'émetteur à vitesse constante  $\vec{V} = -V\vec{e}_x$ .

On place l'origine du repère à la position initiale de l'obstacle, la position de ce dernier est donc :  $x_P(t) = -Vt$

On admet, dans cette partie, qu'il n'y a pas d'onde transmise.

On néglige l'effet de l'écoulement de l'air engendré par le déplacement de la paroi, c'est-à-dire que l'on considère que les ondes incidentes et réfléchies se propagent comme si l'air était au repos.



**Figure 7** – Réflexion sur une interface plane mobile

On considère le cas d'ondes planes progressives, harmoniques se propageant suivant l'axe  $(O, \vec{e}_x)$  à la célérité  $c$ .

On adopte la notation complexe pour les surpressions instantanées et pour les vitesses instantanées.

On a donc pour l'onde incidente :

- $p_i(x, t) = p_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)]$
- $\vec{v}_i(x, t) = \underline{v}_i(x, t) \vec{e}_x = v_{i0} \exp[j(\omega_0 t - k_i x)] \vec{e}_x$  ;

pour l'onde réfléchie :

- $p_r(x, t) = p_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)]$
- $\vec{v}_r(x, t) = \underline{v}_r(x, t) \vec{e}_x = v_{r0} \exp[j(\omega_r t + k_r x)] \vec{e}_x$ .

**D1.** Sachant que les vitesses instantanées incidentes  $\vec{v}_i(x, t)$  et réfléchies  $\vec{v}_r(x, t)$  vérifient l'équation de d'Alembert à une dimension :  $\frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial t^2} = \vec{0}$ , déterminer la relation reliant  $\omega_0$  et  $k_i$  ainsi que celle reliant  $\omega_r$  et  $k_r$ .

**D2.** L'interface est supposée infiniment rigide (pas de transmission d'onde). En déduire la valeur du champ des vitesses du fluide au niveau de l'interface. En remarquant que cette relation est vérifiée  $\forall t$ , expliquer pourquoi cela nécessite que les fonctions exponentielles de l'équation soient égales. En déduire la relation entre  $\omega_0, \omega_r, k_i, k_r$  et  $V$ .

**D3.** En déduire que la pulsation  $\omega_r$  de l'onde reçue par le récepteur à ultrasons, après réflexion de l'onde sonore émise à la pulsation  $\omega_0$  sur un obstacle mobile à la vitesse  $V$  est :

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}$$

**D4.** Dans le cas où l'obstacle mobile est un chien voulant jouer avec le robot et se déplaçant à une vitesse de  $V = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  vers ce dernier, justifier la relation :  $\omega_r \simeq \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right)$ .

#### Exercice 4 : Réflexion et transmission sur une discontinuité

Impédance d'une corde

Réflexion sur une interface dans le cas de la corde

On considère une corde très longue, composée de deux tronçons sans raideur, l'un de masse linéique  $\mu_1$ , l'autre de masse linéique  $\mu_2$ , reliés en  $x = 0$ . La jonction entre les deux tronçons n'engendre aucune raideur en  $x = 0$ . L'ensemble de la corde est tendu par une force de module  $T_0$ .

La jonction entre les deux tronçons constitue une interface entre deux milieux, cela engendre naturellement une onde réfléchie et une onde transmise.

1. Par analogie avec les ondes sonores dans les fluides, proposer une expression de l'impédance d'une corde.

On rappelle que les deux champs couplés sont  $v_y(x, t)$  et  $T_y(x, t)$  sachant que :

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$$

$$T_y(x, t) = T_0 \alpha(x, t)$$

2. Exprimer les conditions à la limite sur  $y(x, t)$  et  $\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$  en  $x = 0$ .

3. En déduire les expressions des coefficients de réflexion  $\rho$  et  $\tau$  à l'interface en  $x = 0$ , pour le champ  $y(x, t)$ .

4. Discuter physiquement des résultats, et faire l'analogie avec le cas des ondes sonores.

Réponses :  $\rho = (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}) / (\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})$  ;  $\tau = 1 + \rho$ .

#### Exercice 5 : Pavillon exponentiel, adaptation d'impédance (E3A PSI 2011)

Interface due à un changement de section dans un tuyau sonore

Cornet conçu comme un adaptateur d'impédance

On admet  $\vec{v}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \vec{e}_x$  où  $u(x, t)$  est le déplacement de la paroi d'une particule de fluide (située en  $x$  au repos)

#### D / TUYAU SONORE : INFLUENCES DES FLUIDES ET D'UN RACCORDEMENT

Une conduite est constituée de deux tubes cylindriques de sections respectives  $S_1$  et  $S_2$ , de même axe  $x'x$  et séparés par le plan  $x = 0$ . Deux fluides non miscibles se répartissent de part et d'autre de ce plan (figure 2).

- $x < 0$  : le fluide 1 est de masse volumique  $\mu_1$  ; le son s'y propage à la célérité  $C_1$  ;
- $x > 0$  : le fluide 2 est de masse volumique  $\mu_2$  ; le son s'y propage à la célérité  $C_2$ .

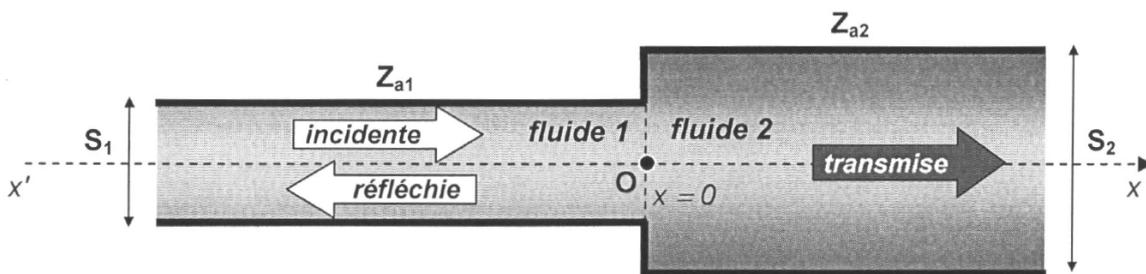


Figure 2

Les impédances acoustiques  $Z_{a1}$  et  $Z_{a2}$  des tubes de sections respectives  $S_1$  et  $S_2$  sont liées aux impédances caractéristiques  $Z_1$  et  $Z_2$  des milieux par les relations :

$$\left\| \begin{array}{l} Z_{a1} = \frac{\mu_1 C_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1} \text{ pour } x < 0 \\ Z_{a2} = \frac{\mu_2 C_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2} \text{ pour } x > 0 \end{array} \right. \text{ avec } \alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}.$$

Une onde de pression plane progressive harmonique incidente  $p_i(x, t)$  se propage dans le milieu 1 selon le sens des  $x$  croissants. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement donne naissance en  $x = 0$  à :

- une onde de pression transmise dans le milieu 2,  $p_t(0, t)$  dont la puissance est  $\mathcal{P}_t$ ,
- une onde de pression réfléchie dans le milieu 1,  $p_r(0, t)$  dont la puissance est  $\mathcal{P}_r$ .

Les pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie s'expriment par :

$$p_i(x, t) = P_{im} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{C_1} \right) \right] \quad p_t(x, t) = P_{tm} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{C_2} \right) \right] \quad p_r(x, t) = P_{rm} \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{C_1} \right) \right]$$

La puissance moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle$  est associée à l'onde incidente. Les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en puissance sont définis par les valeurs absolues des rapports des puissances moyennes transportées :

$$R = \frac{|\langle \mathcal{P}_r \rangle|}{|\langle \mathcal{P}_i \rangle|} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\langle \mathcal{P}_t \rangle|}{|\langle \mathcal{P}_i \rangle|}.$$

**D1.** Montrer que le déplacement incident, correspondant à  $p_i(x, t)$ , s'écrit sous la forme :

$$u_i(x, t) = U_{im} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{C_1} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \text{ Exprimer } U_{im} \text{ en fonction de } P_{im}, \omega, C_1 \text{ et } \mu_1.$$

**D2.** Donner les puissances moyennes transportées  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ ,  $\langle \mathcal{P}_r \rangle$  et  $\langle \mathcal{P}_t \rangle$  en fonction de  $P_{im}$ ,  $P_{rm}$ ,  $P_{tm}$  et des impédances acoustiques des tubes, notées  $Z_{a1}$  et  $Z_{a2}$ .

**D3.** Énoncer, en les justifiant, les conditions de passage de l'onde à l'interface des deux fluides. En déduire deux équations reliant  $P_{im}$ ,  $P_{rm}$ ,  $P_{tm}$  et  $\alpha$ .

**D4.** Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression :  $r_p = \frac{p_r(0, t)}{p_i(0, t)}$  et  $t_p = \frac{p_t(0, t)}{p_i(0, t)}$ .

**D5.** Exprimer les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en puissance à travers l'interface en fonction du seul coefficient  $\alpha$ .  
Quelle relation existe-t-il entre  $R$  et  $T$  ? Que traduit-elle ?

**Influence des deux milieux pour une conduite de section constante :  $S_1 = S_2 = S_0$**

La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est liée à la différence de nature entre les deux fluides.

**D6.** Le milieu **2** est l'air, d'impédance caractéristique  $Z_{air2}$  et le milieu **1** l'intérieur du corps humain dont les constituants sont caractérisés par une impédance caractéristique  $Z_{corps1} \gg Z_{air2}$ . Évaluer  $r_p$  et  $t_p$ , puis  $T$  et  $R$ . Commenter.

Calculer l'atténuation en décibel  $T_{dB} = 10 \log(T)$ , correspondant au coefficient de transmission  $T = 1,7 \cdot 10^{-3}$ . Pourquoi le médecin utilise-t-il un stéthoscope pour écouter les battements cardiaques ou les murmures respiratoires ? Donnée :  $\log 17 \approx 1,2$ .

**Influence du raccordement des deux conduites pour un fluide unique :  $\alpha = S_2/S_1$**

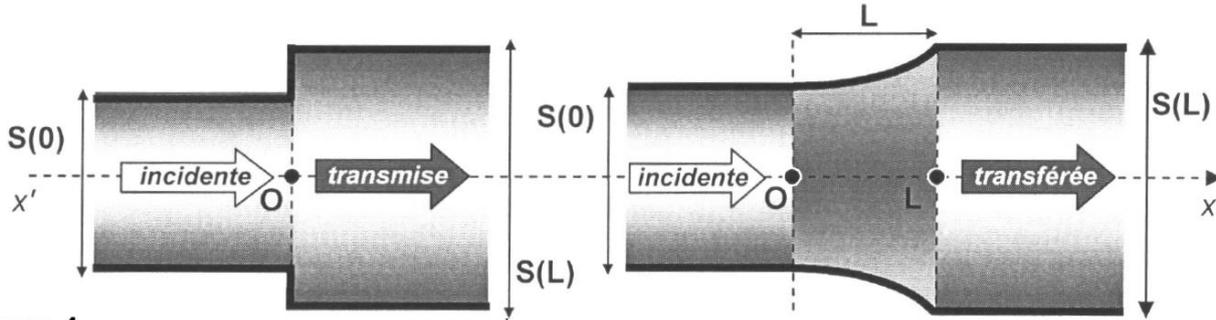
Un fluide de masse volumique au repos  $\mu_0$  dans lequel le son se propage à la célérité  $C$  occupe la conduite constituée des deux tubes de sections différentes  $S_1$  et  $S_2$ . La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est représentée par le changement de section.

**D7.** Tracer l'allure de la fonction  $R(\alpha)$ . Pour quelle valeur de  $\alpha$ , y a-t-il adaptation de l'impédance ? Commenter les cas limites :  $S_2 \ll S_1$  et  $S_2 \gg S_1$ .

## E / PAVILLON EXPONENTIEL ET ADAPTATION DE L'IMPÉDANCE

Un pavillon acoustique rigide de longueur  $L$ , d'axe de révolution  $Ox$  et de section circulaire  $S(x)$  (figure 3) contient un fluide au repos de pression  $P_0$ , de masse volumique  $\mu_0$  et de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_s$  constant. Les effets de pesanteur sont négligés.

Le pavillon acoustique est intercalé dans le raccordement de deux conduites de sections  $S(0)$  et  $S(L)$  comme l'indique la figure 4 ci-dessous :



**Figure 4**

- E10.** Déterminer, pour  $\omega > 10 \omega_c$ , le coefficient de transmission  $T_{\text{pav}} = \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{transférée}} \rangle}{\langle \mathcal{P}_{\text{incidente}} \rangle}$  relatif aux puissances acoustiques incidente à l'entrée et transférée à la sortie du pavillon de longueur  $L$ . Que peut-on dire du rapport des intensités sonores transférée et incidente  $\frac{I_{\text{transférée}}}{I_{\text{incidente}}}$  ? Commenter.
- E11.** Comparer  $T_{\text{pav}}$  au coefficient de transmission en puissance  $T$  de la conduite en l'absence de pavillon (situation considérée aux questions D5. et D7.) en exprimant le rapport  $\frac{T_{\text{pav}}}{T}$  en fonction de  $\alpha$ . Préciser la valeur numérique de ce rapport pour  $\alpha = 9$ . Commenter en précisant le gain en décibel obtenu par le pavillon intercalé.  
Donnée :  $\log 36 \approx 1,56$ .

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d \ln S(x)}{dx} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi :  $S(x) = S(0) e^{x/a}$ , avec  $a > 0$ .

- E3.** Sachant que l'onde sonore se propage à la célérité  $C$ , écrire l'équation de propagation précédente en fonction de  $C$ ,  $a$  et de dérivées spatiales et temporelles de  $p(x, t)$ .  
L'onde sonore est considérée plane progressive harmonique, de la forme :
- $$\underline{p}(x, t) = P_m \exp[j(\omega t - \underline{k}x)].$$
- Le nombre d'onde  $\underline{k}$  est, a priori, complexe :  $\underline{k} = k' - j k''$ ,  $k'$  et  $k''$  étant réels.
- E4.** Mettre en évidence dans l'expression de  $\underline{p}(x, t)$  les termes d'amortissement et de propagation.
- E5.** Etablir la relation de dispersion reliant  $\underline{k}$ ,  $\omega$ ,  $a$  et  $C$ .
- E6.** Montrer que le pavillon se comporte comme un filtre passe-haut ; préciser sa pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de  $a$  et  $C$ .
- E7.** Exprimer la fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de  $C$ ,  $L$ ,  $S(0)$  et  $S(L)$ .  
❖ La fréquence de coupure du pavillon acoustique est  $f_c = 150 \text{ Hz}$ .
- E8.** L'onde sonore progressive se propage suivant  $x > 0$ . Déterminer le réel  $k'$  en fonction de  $C$ ,  $\omega_c$  et  $\omega$ , ainsi que le réel  $k''$  en fonction uniquement de  $a$ .
- E9.** Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface  $S(x)$  perpendiculaire à sa direction de propagation, en fonction de  $P_m$ ,  $\mu_0$ ,  $C$ ,  $S(0)$ ,  $\omega$  et  $\omega_c$ . Commenter.

## Exercice 6 : Intérêt du chevalet pour coupler une corde à une table d'harmonie (Centrale PSI 2013)

Se confronter à un sujet de niveau plus élevé, plus éloigné du programme

### II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

On revient ici à une corde sans raideur.

Une corde vibrante est un « radiateur » acoustique très peu efficace. Si l'on veut produire du son efficacement, il faut utiliser une structure de bien plus grande taille : il s'agit de la table d'harmonie, mince planche d'épicéa, qui par ses vibrations, rayonne du son dans l'espace environnant. On s'intéresse à la manière dont la corde vibrante peut transférer une partie de son énergie à la table d'harmonie par l'intermédiaire d'une pièce de bois collée sur la table : le chevalet.

#### II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

**II.A.1)** On considère une onde progressive sinusoïdale se propageant vers les  $x$  croissants le long de la corde sans raideur étudiée dans la partie I.A. On conserve les notations de la partie I. Montrer que pour cette onde progressive, le rapport  $T_y(x, t)/v_y(x, t)$  est constant et prend la valeur  $-\mu c$ . On appelle « impédance caractéristique » de la corde la grandeur  $Z_C = \mu c$ . Quelle est la dimension de  $Z_C$  ?

**II.A.2)** Que devient ce rapport si l'onde progressive sinusoïdale se propage vers les  $x$  décroissants ?

#### II.B – Couplage corde-chevalet

La « partie utile » (ou longueur vibrante) de la corde est tendue entre l'extrémité gauche (en  $x = 0$ ) où l'agrafe la maintient immobile :  $y(0, t) = 0$ , et l'extrémité droite (en  $x = L$ ) où elle repose sur le chevalet.

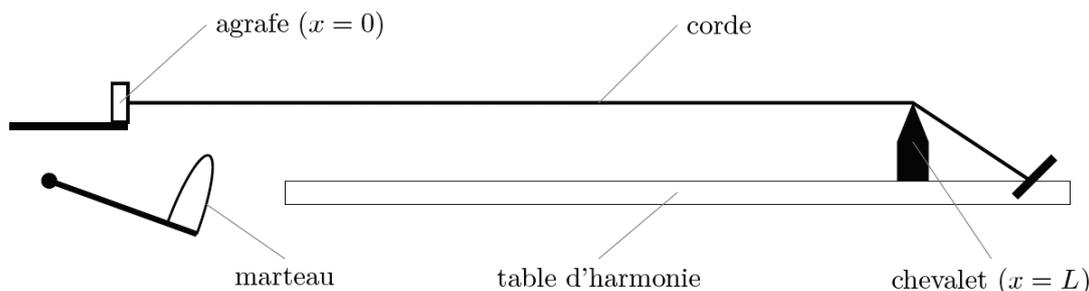


Figure 1

**II.B.1)** On propose de modéliser l'extrémité droite de la corde (située en  $x = L$ ) par la condition aux limites  $T_y(L, t)/v_y(L, t) = -R$ , où  $R$  est une constante positive caractérisant le couplage corde-chevalet. Cette constante  $R$  se nomme l'impédance mécanique de l'ensemble chevalet-table d'harmonie. Pourquoi ce modèle est-il pertinent selon vous ? De quel phénomène rend-il compte ? On se contentera d'une réponse qualitative.

**II.B.2)** On cherche des solutions en ondes stationnaires de la forme  $y(x, t) = f(x) \exp(st)$  où  $s$  est un nombre complexe. Montrer que  $f(x) = A \sinh(sx/c)$  et que  $\tanh(sL/c) = -1/r$  où l'on a posé  $r = R/Z_C$ . Ce dernier résultat peut se récrire

$$\exp\left(\frac{2Ls}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$$

forme que l'on adopte dorénavant.

**II.B.3)**  $s$  étant complexe, on pose  $s = \alpha + j\omega$ , où  $\alpha$  et  $\omega$  sont des réels et  $j^2 = -1$ . Dans le cas où  $r > 1$ , qui correspond au cas du piano, calculer les valeurs possibles de  $\omega$  ; commenter. Calculer également  $\alpha$  en fonction de  $c$ ,  $L$  et  $r$  ; commenter.

**II.B.4)** Montrer que la solution précédente tenant compte du couplage avec le chevalet est de la forme  $y(x, t) = \exp(\alpha t)(\exp(\alpha x/c)F(t+x/c) - \exp(-\alpha x/c)F(t-x/c))$ . Qu'en dites-vous ? Est-ce toujours une onde stationnaire ?

**II.B.5)** L'expérience quotidienne du pianiste montre qu'une note peut persister plusieurs secondes dans l'extrême grave, tandis que dans l'extrême aigu, le son ne persiste qu'une fraction de seconde. Les calculs menés ci-dessus sont-ils en accord avec l'expérience ? Quel(s) raffinement(s) pourrait-on apporter au modèle ?

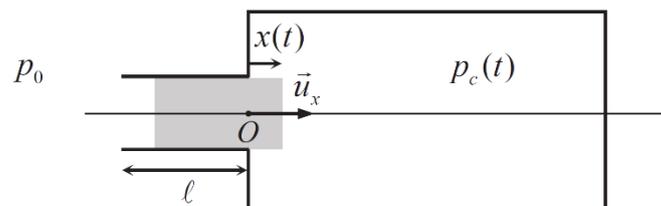
### Extrait CCINP PC physique 2023 : Silencieux à résonateur de Helmholtz

- Etude oscillateur niveau PCSI, appliqué à un fluide étudié du point de vue Lagrangien
- Réflexion/transmission d'une onde à une interface, dans une situation exotique

**NB :** A la question **Q28**, l'expression de la célérité des ondes sonores dans un gaz parfait a été établie

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

Si un traitement acoustique de la pièce ne peut être envisagé, d'autres solutions sont possibles pour réduire l'impact du bruit généré par un système de renouvellement d'air. L'une d'elles consiste à insérer des silencieux le long des réseaux de gaines, munis entre autres de résonateurs de Helmholtz. On modélise un résonateur de Helmholtz par une cavité de grand volume  $V_c$ , reliée à l'air libre par l'intermédiaire d'un col cylindrique horizontal d'axe  $(O, \vec{u}_x)$ , de très faible section  $s$  et de longueur  $\ell$  (**figure 8**). Sous l'effet d'une perturbation, on considère que l'air situé dans le col oscille en bloc, à l'image d'un bouchon qui couliserait. On note  $x(t)$  le déplacement du centre d'inertie de cette tranche d'air à l'instant  $t$  par rapport à sa position à l'équilibre,  $p_c(t)$  la pression supposée uniforme dans la cavité,  $\rho_0$  la masse volumique de l'air dans le col, supposée égale à tout instant à celle de l'air libre à la pression atmosphérique  $p_0$ . On néglige tout phénomène dissipatif et on considère que l'air dans la cavité, de comportement supposé parfait, évolue de façon isentropique.



**Figure 8** - Modélisation d'un résonateur de Helmholtz. La zone grisée représente la tranche d'air qui oscille

**Q36.** Exprimer la résultante  $\vec{F}_p$  des forces pressantes sur la tranche d'air en fonction de  $p_0$ ,  $p_c(t)$  et  $s$ .

En supposant que le volume de la tranche d'air est très petit devant le volume de la cavité,

soit  $\ell s \ll V_c$ , montrer que  $p_c(t) \approx p_0 \left( 1 + \frac{\gamma s x}{V_c} \right)$  au premier ordre, où  $\gamma$  est le rapport entre

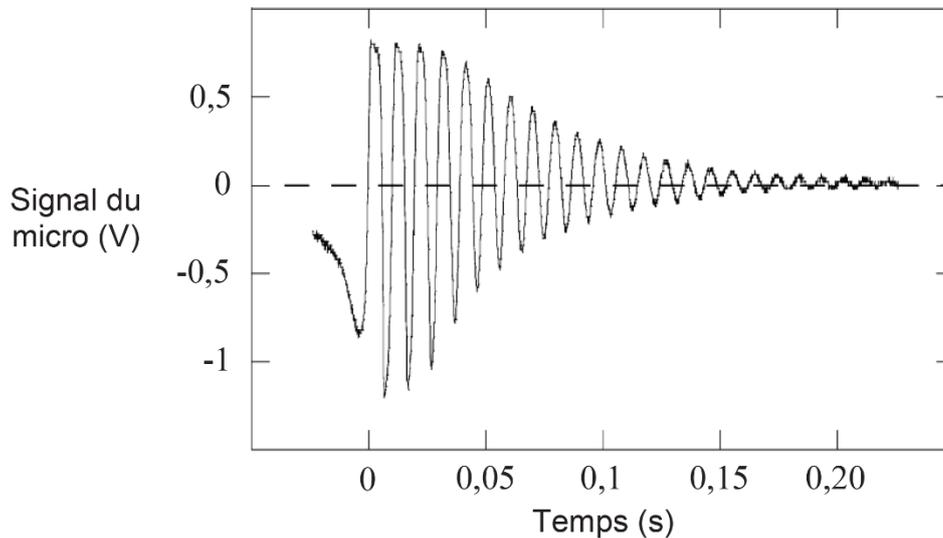
les capacités thermiques à pression et volume constants de l'air.

En déduire que la résultante des forces pressantes sur la tranche d'air est équivalente à une force de rappel élastique de raideur  $k$  :  $\vec{F}_p = -kx\vec{u}_x$ . Exprimer  $k$  en fonction de  $V_c$ ,  $s$ ,  $\rho_0$  et de la célérité  $c$  des ondes sonores dans l'air. On utilisera l'expression de  $c$  établie à la **Q28**.

**Q37.** Montrer que la tranche d'air dans le col oscille de façon harmonique. Vérifier que la

fréquence propre  $f_0$  de ce système oscillant s'écrit :  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}$ .

Un résonateur expérimental est constitué d'un cylindre en PVC de volume  $V_c = 791 \text{ cm}^3$ , fermé à ses deux extrémités. L'une de ces extrémités est percée de façon à insérer un col cylindrique de section  $s = 1,89 \text{ cm}^2$  et de longueur  $\ell = 5,0 \text{ cm}$ . Un microphone de petite taille, relié à un oscilloscope à mémoire, est inséré dans le grand volume. En engageant légèrement l'index dans le col et en le retirant brusquement, on enregistre le signal suivant (**figure 9**). Les conditions de l'expérience sont telles que  $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



**Figure 9** - Oscillations libres d'un résonateur de Helmholtz

Source : Bulletin de l'Union des Physiciens, volume 96, Juin 2002

**Q38.** Quelle serait la nature du signal attendu dans le cadre du modèle considéré dans les questions précédentes ? Comment expliquer la différence avec le signal enregistré ? Estimer le facteur de qualité  $Q$  du résonateur.

**Q39.** Le facteur de qualité est suffisamment grand pour considérer que le système oscille à sa fréquence propre  $f_0$ . Comparer la valeur mesurée de cette fréquence à celle déduite du modèle utilisé.

En fait, les couches d'air situées de part et d'autre du col sont aussi entraînées dans le mouvement. Expliquer en quoi leur prise en compte permet d'affiner la modélisation.

Un haut-parleur, relié à un générateur basse fréquence, impose désormais à l'entrée du col une surpression variant de façon sinusoïdale à la pulsation  $\omega$ , de la forme  $p(t) = p_m \cos(\omega t)$ . La pression à l'entrée du col est donc égale à  $p_0 + p(t)$ . On associe à cette pression acoustique la grandeur complexe  $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$  où  $j^2 = -1$ . On cherche une réponse de la tranche d'air de la forme  $\underline{x}(t) = \underline{x}_m e^{j\omega t}$  en régime forcé en restant dans le cadre du modèle développé dans **Q36** et **Q37**.

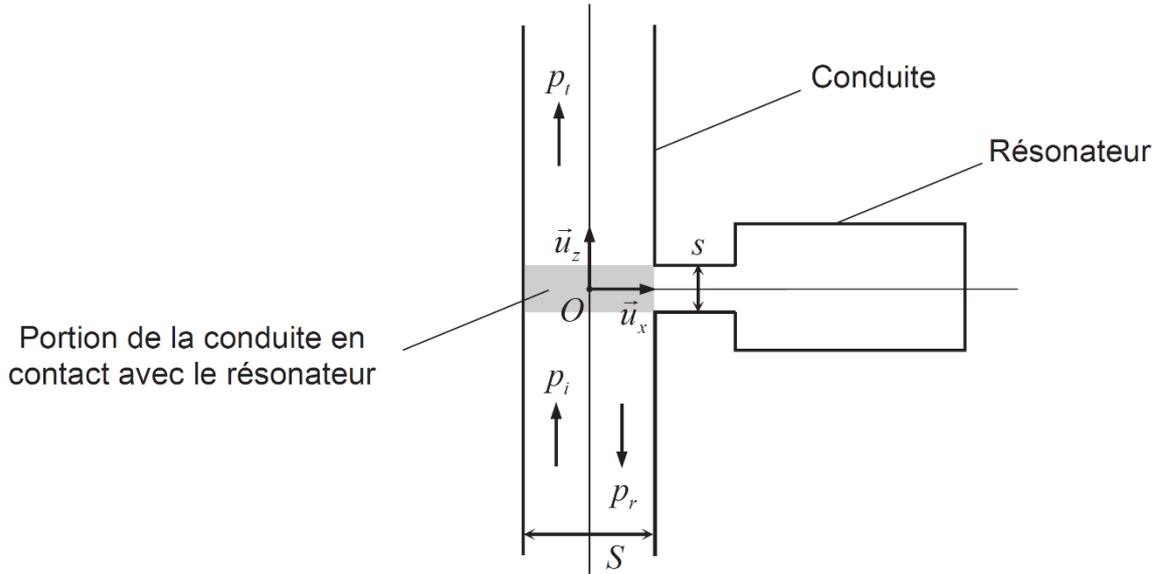
**Q40.** Établir l'expression de  $\underline{x}(t)$ . En déduire que la vitesse de la tranche d'air dans le col s'écrit

en représentation complexe :  $\underline{v}(t) = \underline{v}_m e^{j\omega t}$  où  $\underline{v}_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}$ .

Que dire de  $|\underline{v}_m|$  dans le cas où  $\omega = \omega_0$  ? En pratique,  $|\underline{v}_m|$  reste borné. Expliquer pourquoi.

Un résonateur de Helmholtz est maintenant connecté en  $z = 0$  à une longue conduite cylindrique d'axe  $(O, \vec{u}_z)$  et de section  $S \gg s$  (**figure 10**). La masse volumique de l'air au repos dans la conduite est  $\rho_0$ .

Une onde acoustique incidente plane progressive sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ , se propage dans la conduite dans le sens des  $z$  croissants à la célérité  $c$ . Elle est caractérisée par sa pression acoustique  $\underline{p}_i(z, t) = \underline{p}_{i,m} e^{j(\omega t - kz)}$ . Du fait de la présence du résonateur en  $z = 0$ , elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise, caractérisées par leurs pressions acoustiques respectives  $\underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{r,m} e^{j(\omega t + kz)}$  et  $\underline{p}_t(x, t) = \underline{p}_{t,m} e^{j(\omega t - kz)}$ .



**Figure 10** - Résonateur de Helmholtz connecté à une conduite

**Q41.** Exprimer les champs des vitesses caractérisant les ondes acoustiques incidente, réfléchie et transmise, notées respectivement  $\underline{v}_i(z, t)$ ,  $\underline{v}_r(z, t)$  et  $\underline{v}_t(z, t)$ , en fonction notamment de l'impédance caractéristique  $Z_c$  de la conduite définie à la **Q29**.

**Q42.** On note  $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$  la pression acoustique et  $\underline{v}(t) = v_m e^{j\omega t}$  le champ des vitesses correspondant en  $z = 0$  à l'entrée du col du résonateur.

Exprimer  $p_m$  en fonction de  $\underline{p}_{i,m}$  et  $\underline{p}_{r,m}$ , puis en fonction de  $\underline{p}_{t,m}$ .

En supposant la conservation du débit volumique à travers la surface qui délimite la portion de la conduite en contact avec le résonateur en  $z = 0$  (**figure 10**), établir une relation entre

$\underline{p}_{i,m}$ ,  $\underline{p}_{r,m}$ ,  $\underline{p}_{t,m}$ ,  $v_m$ ,  $S$ ,  $s$  et  $Z_c$ .

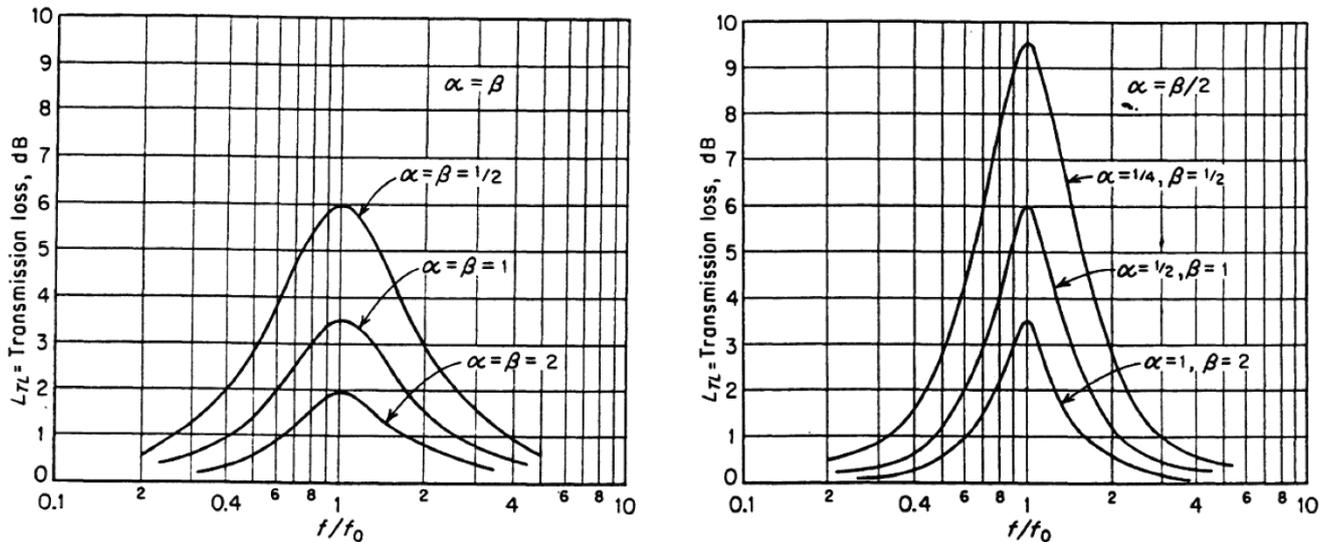
Un calcul non demandé permet de déduire de l'ensemble des résultats établis précédemment que :

$$\underline{p}_{t,m} = \frac{\underline{p}_{i,m}}{1 - \frac{j}{2\beta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\ell S \omega_0}{sc}$$

**Q43.** Exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\beta$  l'indice de perte de transmission  $L_{TL}$  défini par

$$L_{TL} = 10 \log \left( \frac{|p_{i,m}|^2}{|p_{t,m}|^2} \right) \text{ et exprimé en décibels.}$$

Il y a en fait toujours des phénomènes dissipatifs dus à la viscosité dans le col, phénomènes pouvant être renforcés par l'adjonction dans le col de matériaux poreux. Dans ces conditions, l'indice de perte de transmission est également fonction d'un coefficient d'amortissement adimensionné  $\alpha$  (**figure 11**).



**Figure 11** - Indice de perte de transmission autour de la fréquence de résonance  $f_0$  pour différentes valeurs des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$

Source : T.F.W. Embleton. Mufflers, in Noise and Vibration Control.

**Q44.** Identifier à l'aide des courbes de la **figure 11** la nature du filtre acoustique que constitue le résonateur de Helmholtz relié à la conduite.

Pour une valeur du coefficient  $\beta$  donnée, expliquer à l'aide des courbes l'intérêt d'avoir un coefficient d'amortissement  $\alpha$  important.

**FIN**